Beitrag zur Theorie

der

geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

F. C. B. HUGO BUECKING
aus Bieber.

Marburg.
N. G. Elwert'sche Universitäts-Buchdruckerei.
1874.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0068

Die in der neuern Zeit sehr ausgebildete Theorie der geometrischen Verwandtschaften und der damit zusammenhängenden Abbildung geometrischer Flächen auf einander und insbesondere auf die Ebene wurde zuerst beinahe gleichzeitig angeregt in den Werken von Steiner, Moebius und Magnus. Während Moebius in seinem »barycentrischen Calcul« (S. 179—368) die schon früher ziemlich bekannte Verwandtschaft ersten Grades aus einem einheitlichen Gesichtspunkte betrachtete, beschäftigten sich Steiner in seiner »systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten« (S. 251 etc.) und Magnus in der Abhandlung »nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie« in Crelle's Journal (Bd. VIII. S. 51. etc.) und in seiner »Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene« (I. Abth. §. 50 etc.) zuerst mit einer algebraischen Verwandtschaft zweiten Grades, und zwar Steiner synthetisch, Magnus analytisch; die Gleichungen des letzteren sind der analytische Ausdruck der Entwicklungen des ersteren.

Trotz der mannigfachen Anwendung und Ausbildung, welche die Theorie der Abbildung seitdem erfahren, ist in einer Richtung eine Erweiterung dieser Arbeiten von Steiner und Magnus über die Verwandtschaft zweiten Grades unseres Wissens noch nicht unternommen worden. Die Verwandtschaft zweiten Grades wird, wie alle geometrischen Verwandtschaften, bedingt durch die Annahme einer Anzahl entsprechender Elemente und ihre Behandlung vereinfacht sich bedeutend, wenn in je zwei auf einander bezogenen Ebenen als gegeben angesehen werden können zwei sich gegenseitig entsprechende Dreiecke. Man hat diese bei den seitherigen Untersuchungen immer als fest angenommen und auch den Fall, wo dieselben imaginäre Elemente enthalten, noch nicht besonders erörtert. Es soll daher in gegenwärtiger Arbeit der Einfluss untersucht werden, welchen eine beliebige Variation der genannten Hauptdreiecke auf alle der Verwandtschaft zweiten Grades eigenthümliche Beziehungen ausübt, woran sich die Betrachtung von Hauptdreiecken mit imaginären Elementen leicht anschliessen lässt. Zuvor müssen jedoch der bessern Uebersicht halber die bis jetzt bekannten Resultate in Kürze wiederholt (§§. 1 und 2), und, wo es wegen des Folgenden nöthig scheint, eingehender behandelt werden. —

§. 1. Aufsuchung der festen Elemente und der Fundamentaleigenschaften zweier in einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades mit einander stehenden Ebenen.

Das eindeutige Entsprechen von Punkten $p(x, y)$ in der Ebene P mit ihren Abbildungen, den Punkten $\pi(\xi, \eta)$ in der Ebene Π, drückt sich algebraisch aus durch die zwei Gleichungen vom ersten Grad in Bezug auf die Coordinaten x, y, ξ, η*):

$$(1)\quad \begin{cases} (\alpha_{00}\, x + \alpha_{01}\, y + \alpha_{02})\,\xi + (\alpha_{10}\, x + \alpha_{11}\, y + \alpha_{12})\,\eta + \alpha_{20}\, x + \alpha_{21}\, y + \alpha_{22} = 0, \\ (\alpha'_{00}\, x + \alpha'_{01}\, y + \alpha'_{02})\,\xi + (\alpha'_{10} x + \alpha'_{11} y + \alpha'_{12})\,\eta + \alpha'_{20} x + \alpha'_{22} y + \alpha_{22} = 0, \end{cases}$$

in welchen die α vollkommen willkürliche Constanten bedeuten. Durch Einführung homogener Coordinaten $(\xi_0, \xi_1, \xi_2; \eta_0, \eta_1, \eta_2)$ und unter gleichzeitiger Benutzung der Abkürzungen

$$\begin{cases} \varrho A_0 \equiv \alpha_{00}\, \xi_0 + \alpha_{01}\, \xi_1 + \alpha_{02}\, \xi_2, \\ \varrho A_1 \equiv \alpha_{10}\, \xi_0 + \alpha_{11}\, \xi_1 + \alpha_{12}\, \xi_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho A'_2 \equiv \alpha'_{20}\, \xi_0 + \alpha'_{21}\, \xi_1 + \alpha'_{22}\, \xi_2 \end{cases}$$

erhält man bei Hinzufügung noch einer dritten identischen Gleichung statt der Gleichungen (1) das folgende System:

$$\begin{cases} A_0\, \eta_0 + A_1\, \eta_1 + A_2\, \eta_2 = 0, \\ A_0'\, \eta_0 + A_1'\, \eta_1 + A_2'\, \eta_2 = 0, \\ 0.\, \eta_1 + 0.\, \eta_1 + 0.\, \eta_2 = 0. \end{cases}$$

Die aus diesem resultirende Auflösung

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho\, \eta_0 = A_1 A_2' - A_1' A_2, \\ \varrho \eta_1 = A_2 A_0' - A_2' A_0, \\ \varrho \eta_2 = A_0 A_1' - A_0' A_1 \end{cases}$$

*) Magnus, Crelle's Journal, Bd. VIII. p. 52.

bleibt gültig für alle Werthe der A zufolge der Bedingung

$$R \equiv \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_0' & A_1' & A_2' \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

die Coordinaten η_0, η_1, η_2 sind somit stets proportional homogenen Funktionen vom zweiten Grade in Bezug auf die Coordinaten ξ_0, ξ_1, ξ_2; und eine Gerade

$$(3) \quad b_0\eta_0 + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 = 0$$

hat zum Bilde in der PEbene die Curve

$$(4) \quad b_0(A_1A_2' - A_1'A_2) + b_1(A_2A_0' - A_2'A_0) + b_2(A_0A_1' - A_0'A_1) = 0,$$

d. i. einen Kegelschnitt, welcher, wie auch die Parameter b_0, b_1, b_2 beschaffen sein mögen, stets durch die Durchschnittspunkte der drei Kegelschnitte

$$(5) \quad \begin{cases} A_1A_2' - A_1'A_2 = 0, \\ A_2A_0' - A_2'A_0 = 0, \\ A_0A_1' - A_0'A_1 = 0 \end{cases}$$

hindurchgeht. Die Auflösung der Gleichungen (5) liefert drei Wurzelpaare für die Coordinatenverhältnisse $\frac{\xi_0}{\xi_2}, \frac{\xi_1}{\xi_2}$, welche entweder sämmtlich reell, oder von denen eins reell und zwei imaginär sind. *) *Es gibt also in der Ebene P drei feste Punkte,* die wir nach Steiner's und Magnus' Vorgang *Hauptpunkte* (p_0, p_1, p_2) nennen wollen; durch diese und durch zwei Bedingungen, welche aus den Verhältnisswerthen der Parameter b_0, b_1, b_2 folgen, ist der Kegelschnitt (4) vollkommen eindeutig bestimmt.

Durch Ordnung der Gleichungen (1) nach x, y statt ξ, η erhält man den obigen Gleichungen (1) ganz analoge, in welchen x und y an die Stelle von ξ und η, und umgekehrt ξ, η an die Stelle von x, y, getreten sind und nur die vollkommen willkürlichen Coefficienten α zum Theil eine andere Reihenfolge beobachten. Dieser Umstand gestattet sofort den Schluss, dass jede beliebige Gerade in der Ebene P sich in der ΠEbene gleichfalls als ein Kegelschnitt abbildet, welcher durch drei feste Hauptpunkte π_0, π_1, π_2 hindurchgeht, und dass überhaupt *ganz analoge Resultate für Gebilde in der Ebene P wie für solche in der Ebene Π existiren;* im Folgenden braucht deshalb dieser Reciprocität keine weitere Aufmerksamkeit geschenkt zu werden.

Aus den Gleichungen (2) folgt weiter, dass sich eine beliebige Curve n^{ter} Ordnung abbildet als eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, ein beliebiger Kegelschnitt somit als eine Curve vierter Ordnung, welche in dem speciellen Fall, dass der Kegelschnitt durch die drei

*) Magnus, l. c. p. 53.

Hauptpunkte hindurchgeht, sich reducirt auf eine Gerade. Einem beliebigen reellen Punkte, insofern er sich als Durchschnitt zweier Geraden betrachten lässt, ist zugeordnet der vierte stets reelle Durchschnittspunkt der zwei den Geraden entsprechenden Kegelschnitte in der andern Ebene; einem Strahlbüschel durch einen Punkt eine Kegelschnittschaar durch die Hauptpunkte und den jenem Punkte entsprechenden Punkt. Ausserdem bildet sich

die Gerade $\eta_0 = 0$ ab in dem Kegelschnitt $A_1A_2' - A_1'A_2 = 0$,
» » $\eta_1 = 0$ » » » » $A_2A_0' - A_2'A_0 = 0$, und
» » $\eta_2 = 0$ » » » » $A_0A_1' - A_0'A_1 = 0$,

der Coordinatendreieckseckpunkt ($\eta_0 = 0$, $\eta_1 = 0$) daher in dem vierten Durchschnittspunkt von $A_1A_2 - A_1''A_2 = 0$ und $A_2A_0' - A_2'A_0 = 0$, d. i. in dem Schnittpunkte von $A_2 = 0$ und $A_2' = 0$; der Eckpunkt ($\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$) in dem Punkte ($A_0 = 0$, $A_0' = 0$) und der Eckpunkt ($\eta_2 = 0$, $\eta_0 = 0$) in dem Punkt ($A_1 = 0$, $A_1' = 0$). Die den Coordinatendreiecksseiten zugehörigen Kegelschnitte sind vollkommen eindeutig, sie gehen durch die drei Hauptpunkte und je durch zwei leicht zu bestimmende feste Punkte, z. B. $A_1A_2' - A_1'A_2 = 0$ noch durch die Punkte ($A_2' = 0$, $A_2 = 0$) und ($A_1 = 0$, $A_1' = 0$). —

§. 2. Betrachtung des Falles, in welchem die Hauptdreiecke vollkommen reell sind und eine unveränderliche Lage besitzen.

Wenn wir jetzt zuerst den von Steiner und Magnus allein betrachteten Fall je dreier reellen Hauptpunkte in jeder Ebene in Erwägung ziehen, so gewinnen hier unter allen möglichen Lagen, welche man den Seiten des Coordinatendreiecks $\eta_0 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ geben kann, diejenigen eine besondere Beachtung, für welche die den Dreiecksseiten entsprechenden Kegelschnitte (5) zu je einem System zweier Geraden degeneriren. Letzteres erreicht man am besten durch passende Wahl der Punkte ($A_2 = 0$, $A_2' = 0$), ($A_1 = 0$; $A_1' = 0$), ($A_0 = 0$, $A_0' = 0$), wodurch sich gewisse Bedingungen für die Coefficienten α ergeben, die hinreichend sind, um die neue Lage des Coordinatendreiecks $\eta_0 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ zu bestimmen. Fallen nemlich jene Punkte mit den Hauptpunkten p_0, p_1, p_2 zusammen, so reduciren sich die Kegelschnitte (5) offenbar auf die Geraden

$$p_0p_2 \equiv x_1 = 0 \text{ und } p_0p_1 \equiv x_2 = 0,$$
$$\textit{resp. } p_1p_0 \equiv x_2 = 0 \text{ und } p_1p_2 \equiv x_0 = 0,$$
$$p_2p_1 \equiv x_0 = 0 \text{ und } p_2p_0 \equiv x_1 = 0,$$

und statt (2) erhält man die einfacheren Substitutionsgleichungen

$$(2^a) \quad \begin{cases} \varrho\eta_0 = x_1x_2, \\ \varrho\eta_1 = x_2x_0, \\ \varrho\eta_2 = x_0x_1. \end{cases}$$

Multiplicirt man in diesen der Reihe nach je zwei Gleichungen mit einander und lässt man

die allen drei resultirenden Gleichungen gemeinsamen Faktoren in den Proportionalitätsfaktor μ eingehen, so kommt man zu dem (2^a) ganz analogen System

$$(2^b)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu x_0 = \eta_1\eta_2\,, \\ \mu x_1 = \eta_2\eta_0\,, \\ \mu x_2 = \eta_0\eta_1\,. \end{array}\right.$$

Es unterliegt daher keinem Zweifel, dass das jetzige Dreieck ($\eta_0 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$) entsprechend dem Dreieck ($x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) das in der Π Ebene gelegene Hauptdreieck $\pi_0\pi_1\pi_2$ ist. Aus (2^a) und (2^b) folgt sofort der Satz:

I. »*Die beiden Hauptdreiecke $p_0p_1p_2$ und $\pi_0\pi_1\pi_2$ entsprechen sich gegenseitig, und zwar in der Weise, dass je einem Eckpunkte des einen eine Seite des andern, und umgekehrt je eine Seite des einen einem Eckpunkt des andern Dreiecks zugehört*« *).

Wählt man demnach die Hauptdreiecke zu Coordinatendreiecken mit den Seiten $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, *resp.* $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, so wird der Uebergang von Figuren der einen Ebene zu ihren Abbildungen in der andern Ebene vermittelt durch die Gleichungen

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho x_0 = y_1y_2\,, & \varrho y_0 = x_1x_2\,, \\ \varrho x_1 = y_2y_0\,, & \varrho y_1 = x_2x_0\,, \\ \varrho x_2 = y_0y_1\,, & \varrho y_2 = x_0x_1\,. \end{array}\right.$$

Einer Geraden

$$(7)\quad b_0y_0 + b_1y_1 + b_2y_2 = 0$$

entspricht jetzt der Kegelschnitt

$$b_0x_1x_2 + b_1x_2x_0 + b_2x_0x_1 = 0$$

und für den Fall, dass einer der Parameter b_0, b_1, b_2 verschwindet, das System einer Hauptdreiecksseite und einer Geraden durch den gegenüberliegenden Hauptpunkt, oder kürzer der von beiden Geraden festgelegte Schnittpunkt (für $b_2 = 0$ z. B. der Schnittpunkt von $x_2 = 0$ und $b_0x_1 + b_1x_0 = 0$). Daraus folgt:

II. »*Allen in einem Hauptpunkte vereinigten Richtungen ist in der andern Ebene die auf der entsprechenden Hauptdreiecksseite vereinigte Punktreihe zugeordnet, d. h. das durch einen Hauptpunkt gelegte Strahlbüschel und die Punktreihe auf der jenem entsprechenden Hauptseite sind projectivisch.*«

Mit Hilfe dieser Relation beweist sich von Neuem der schon von Steiner **) aufgestellte Satz: *III.* »*Den gesammten Geraden in einer der zwei Ebenen P und Π, ausgenommen die Strahlen der drei Strahlbüschel (p_0, p_1, p_2 oder π_0, π_1, π_2), deren Mittelpunkte die Spitzen des Hauptdreiecks sind, entsprechen in der andern Ebene die*

*) Vgl. auch Durège, ebene Curven dritter Ordnung, 1871. S. 121 etc.

**) Steiner, systemat. Entw., S. 258.

gesammten Kegelschnitte, welche dem Hauptdreieck umschrieben werden können, und auch umgekehrt. Und ferner: *Die Geraden, welche Strahlen der genannten Strahlbüschel sind, entsprechen einander paarweise, nemlich es entsprechen sich die Strahlen der Strahlbüschel p_0 und π_0, p_1 und π_1, p_2 und π_2, und es sind diese Strahlbüschel in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlenpaare projectivisch.«*

Hierauf gründet sich die Construction des einem beliebigen Punkte entsprechenden Punktes*). Betrachtet man nemlich den gegebenen Punkt als Durchschnitt der Geraden

$$(8)\quad \varkappa x_0 + \lambda x_1 = 0,\ \lambda x_1 + \mu x_2 = 0,\ \mu x_2 - \varkappa x_0 = 0,$$

so bestimmen die zugeordneten Systeme von Geraden

$$\frac{y_0}{\varkappa} + \frac{y_1}{\lambda} = 0 \text{ und } y_2 = 0;\ \frac{y_1}{\lambda} + \frac{y_2}{\mu} = 0 \text{ und } y_0 = 0;\ \frac{y_2}{\mu} - \frac{y_0}{\varkappa} = 0 \text{ und } y_1 = 0$$

einmal die drei Hauptpunkte, dann als vierten Punkt den mit dem gegebenen Punkt veränderlichen, den diesem zugeordneten Punkt

$$(9)\quad \frac{y_0}{\varkappa} + \frac{y_1}{\lambda} = 0,\ \frac{y_1}{\lambda} + \frac{y_2}{\mu} = 0,\ \frac{y_2}{\mu} - \frac{y_0}{\varkappa} = 0.$$

Zugleich gestattet die Beschaffenheit der Parameter $\varkappa$, λ, μ den Schluss, dass

IV. »Punkten innerhalb des Hauptdreiecks der einen Ebene nur solche, welche wieder innerhalb des Hauptdreiecks der andern Ebene liegen, und Punkten ausserhalb nur solche ausserhalb entsprechen können«.

Dadurch dass man in den Gleichungen (8) und (9) den Parametern $\varkappa$, λ, μ die speziellen Werthe

$$\varkappa = +1,\ \lambda = \pm 1,\ \mu = \pm 1,$$

ertheilt, wird man noch zu den folgenden Sätzen geführt:

V. »Die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die Seiten des Hauptdreiecks berühren, entsprechen sich in beiden Ebenen gegenseitig«.

Und:

VI. »Je zwei homologe Halbirungslinien der Aussen- und Innenwinkel der Hauptdreiecke entsprechen sich gegenseitig; sie gehen zugleich durch die sich gegenseitig entsprechenden Mittelpunkte der Berührungskreise der Hauptdreiecksseiten«.

Sehr wichtig wird in der weiteren Betrachtung auch die aus den Sätzen II. und III. fliessende Bemerkung, dass dem Schnittpunkt mehrerer Curven in dem Fall, dass er mit einem Hauptpunkte zusammenfällt, in der andern Ebene nicht wieder ein den entsprechenden Curven gemeinsamer Punkt als Bild zugehört; es durchschneiden vielmehr dann die jenen Curven zugeordneten Gebilde die dem Durchschnittspunkt entsprechende Hauptseite in verschiedenen nach dem Obigen leicht construirbaren Punkten. Sind insbesondere bei zwei sich in einem Hauptpunkt schneidenden Curven die Durchgangsrichtungen durch diesen verschieden und werden repräsentirt durch die Gleichungen

$$x_0 + \lambda x_1 = 0,\ x_0 + \lambda_1 x_1 = 0,$$

*) Durège, l. c. p. 122.

so werden die entsprechenden Curven die Gerade $y_2 = 0$ durchkreuzen die erste in dem Punkt $(\lambda y_0 + y_1 = 0,\ y_2 = 0)$, die zweite in dem Punkt $(\lambda_1 y_0 + y_1 = 0,\ y_2 = 0)$. Besitzen dagegen beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente im Hauptpunkte, z. B. $x_0 + \varkappa x_1 = 0$, so schneiden sich im Allgemeinen die zugeordneten Curven mit der Geraden $y_2 = 0$ in dem Punkte $(\varkappa y_0 + y_1 = 0,\ y_2 = 0)$; nur in dem Fall, dass die beiden Curven (Curvenäste) zusammen einen Wendungspunkt oder Rückkehrpunkt in dem Hauptpunkte bilden, entspricht ihnen eine Curve, welche die entsprechende Hauptseite in dem der gemeinsamen Tangente zugeordneten Punkte zugleich berührt und schneidet, also gleichfalls einen Wendungspunkt bildet, resp. nur einfach berührt, und zwar von innen oder von aussen, jenachdem die Spitze auf der Innen- oder Aussenseite des Hauptdreiecks liegt. Im Uebrigen aber entspricht jedem Schnittpunkte von Curven der Schnittpunkt der zugeordneten Gebilde.

Eine Anwendung findet dieser Satz im Folgenden. Ist der der unendlich fernen Geraden

(10) $x_0 \sin A_0 + x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 = 0,\ (y_0 \sin B_0 + y_1 \sin B_1 + y_2 \sin B_2 = 0)$

entsprechende Kegelschnitt

(11) $y_1 y_2 \sin A_0 + y_2 y_0 \sin A_1 + y_0 y_1 \sin A_2 = 0,\ (x_1 x_2 \sin B_0 + x_2 x_0 \sin B_1 + x_0 x_1 \sin B_2 = 0)$

eine Parabel, so berührt er zufolge eines bekannten Satzes die unendlich ferne Gerade

$y_0 \sin B_0 + y_1 \sin B_1 + y_2 \sin B_2 = 0,\ (x_0 \sin A_0 + x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 = 0)$;

es berühren sich mithin auch die entsprechenden Gebilde, der Kegelschnitt

$x_1 x_2 \sin B_0 + x_2 x_0 \sin B_1 + x_0 x_1 \sin B_2 = 0,\ (y_1 y_2 \sin A_0 + y_2 y_0 \sin A_1 + y_0 y_1 \sin A_2 = 0)$

und die unendlich ferne Gerade (10), d. h. der letztere Kegelschnitt ist gleichfalls eine Parabel*). Ist aber einer der Kegelschnitte (11) eine Hyperbel, schneidet er also die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten, so wird auch der dieser unendlich fernen Geraden entsprechende Kegelschnitt eine Hyperbel sein. Und sind die Hauptdreiecke ähnlich $(A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2)$, so werden die den unendlich fernen Geraden entsprechenden Kegelschnitte die den Hauptdreiecken umschriebenen Kreise sein. Man erhält demnach das Resultat:

VII. »*Den unendlich fernen Punkten jeder der zwei Ebenen P und Π entspricht ein bestimmter Kegelschnitt in der andern Ebene, welcher dem Hauptdreieck umschrieben ist; ist einer derselben eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse (und speciell ein Kreis), so ist der andere gleichfalls eine Hyperbel, resp. Parabel, Ellipse (Kreis).*«

Ein ganz ähnlicher Beweis führt zu dem folgenden Gesetz:

VIII. »*Der einer gegebenen Geraden entsprechende Kegelschnitt ist entweder Hyperbel, Parabel oder Ellipse, jenachdem diese Gerade den der unendlich fernen Geraden entsprechenden Kegelschnitt schneidet, berührt oder gar nicht trifft.*«**)

*) Steiner, l. c. p. 261.

**) Steiner, l. c. p. 263.

Mit Hilfe der erlangten Resultate wird es nun leicht, die Haupteigenschaften der Gebilde anzugeben, welche einer Curve n^{ter} Ordnung entsprechen. Letzterer ist im Allgemeinen zufolge der Gleichungen (6) eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Orduung zugeordnet, welche vollkommen eindeutig bestimmt ist, trotzdem ihre Gleichung ebenso wie die gegebene Gleichung im Allgemeinen nur $\frac{n(n+3)}{2}$ willkürliche Constanten enthalten kann. Da nemlich eine Curve n^{ter} Ordnung jede der Hauptdreiecksseiten im Allgemeinen in n Punkten schneidet und diesen n Punkten ein Complex von n Strahlen, welche durch den jedesmal entsprechenden Hauptpunkt gelegt werden können, zugehört, so entspricht der Curve n^{ter} Ordnung offenbar eine Curve, welche $n$mal durch jeden Hauptpunkt hindurchgeht und also im Allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ willkürliche Constanten vollkommen eindeutig bestimmt ist*).

Besitzt eine Curve n^{ter} Ordnung in dem einen Hauptpunkt einen $r_0$fachen, in dem andern einen $r_1$fachen und in dem dritten einen $r_2$fachen Punkt, was nur möglich, so lange

$$(12)\quad \frac{r_0(r_0+1)}{2} + \frac{r_1(r_1+1)}{2} \quad \frac{r_2(r_2+1)}{2} \leqq \frac{n(n+3)}{2},$$

so wird sie durch α Bedingungen vollkommen eindeutig bestimmt, vorausgesetzt, dass

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - \left[\frac{r_0(r_0+1)}{2} + \frac{r_1(r_1+1)}{2} + \frac{r_2(r_2+1)}{2}\right].$$

Dieser Curve n^{ten} Grades, welche die Hauptseiten ausser in den Hauptpunkten im Allgemeinen noch in $n-(r_1+r_2)$, $n-(r_2+r_0)$, $n-(r_0+r_1)$ Punkten schneidet, ist als Bild zugeordnet eine Curve, welche die Hauptseiten in r_0, resp. r_1 und r_2 Punkten schneidet und in den einzelnen Hauptpunkten im Allgemeinen einen $n-(r_1+r_2)$fachen, resp. $n-(r_2+r_0)$- oder $n-(r_0+r_1)$fachen Punkt besitzt. Die Ordnungszahl m dieser Curve ist gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden, oder auch gleich der Anzahl der Schnittpunkte der beiden entsprechenden Elemente in der andern Ebene, also eines durch die drei Hauptpunkte gelegten Kegelschnitts mit der gegebenen Curve; von dieser Zahl sind aber die in die Hauptpunkte fallenden Durchschnittspunkte auszuschliessen, weil sie keinem Schnittpunkt der Geraden mit der zu untersuchenden Curve angehören. Es ist daher einfach

$$m = 2n - (r_0+r_1+r_2);$$

und wir erhalten somit, was die allgemeine Untersuchung einer Curve n^{ter} Ordnung anlangt, das Resultat:

IX. »*Einer Curve n^{ter} Ordnung, welche in den drei Hauptpunkten r_0-, r_1-, $r_2$fache Punkte besitzt, ist auf vollkommen eindeutige Weise zugeordnet eine Curve von der Ordnung $2n-(r_0+r_1+r_2)$, welche in den Hauptpunkten $n-(r_1+r_2)$-, $n-(r_2+r_0)$-, $n-(r_0+r_1)$fache Punkte besitzt.*«

*) Vgl. hierüber auch Durège, l. c., p. 126.

Hieraus folgt für $n = r_0 + r_1 + r_2$ das weitere Gesetz:

X. »Einer Curve n^{ter} Ordnung, welche 3 mehrfache (r_0-, r_1-, $r_2$fache) Punkte in den Hauptpunkten besitzt, ist, vorausgesetzt dass $n = r_0 + r_1 + r_2$ und zugleich die Bedingung (12) erfüllt ist, eine Curve gleichfalls n^{ter} Ordnung zugeordnet, welche auch r_0-, r_1-, $r_2$fache Punkte in den Hauptpunkten besitzt«

Die Anwendung der zuletzt gefundenen Beziehungen auf die Kegelschnitte führt zu folgendem Satz:

XI. »Ein Kegelschnitt bildet sich ab als eine Curve vom 4ten, 3ten, 2ten oder ersten Grade, jenachdem er durch keinen, durch einen, durch zwei), oder durch alle drei Hauptpunkte geht.*

Die erhaltenen Resultate vereinfachen sich ausserordentlich, wenn die beiden Hauptdreiecke ähnlich oder gar congruent sind. Im ersteren Falle, wo also unter den Winkeln die Relation besteht

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,$$

kann man die Ebenen P und Π so aufeinanderlegen, dass die Mittelpunkte der den Hauptdreiecken umschriebenen Kreise, welche den unendlich fernen Geraden zugeordnet sind, aufeinanderfallen, die Hauptdreiecke selbst aber so liegen, dass je zwei homologe Seiten einander parallel sind und den kleinsten Abstand von einander besitzen. Bei dieser Lage ist die Construction entsprechender Strahlen in den projectivischen Strahlbüscheln p_0 und π_0, p_1 und π_1, p_2 und π_2 leicht ausführbar, sowie auch die auf diese gestützte Construction entsprechender Punkte. Zu dem Strahl $\varkappa x_0 + \lambda x_1 = 0$ gehört nemlich der Strahl $\frac{y_0}{\varkappa} + \frac{y_1}{\lambda} = 0$, welcher parallel ist zu dem Strahl $\frac{x_0}{\varkappa} + \frac{x_1}{\lambda} = 0$, der gegen die Halbirungslinie des Winkels A_2 symmetrisch zu dem gegebenen Strahl des Büschels p_2 liegt.

Sind die Hauptdreiecke congruent, so wird man die Ebenen P und Π so aufeinanderlegen, dass sich die Hauptdreiecke vollständig decken. Alsdann ist nur *ein* Coordinatensystem nöthig, und die Substitutionsgleichungen (6) reduciren sich auf folgende:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho x_0 &= x_1 x_2 \\ \varrho x_1 &= x_2 x_0 \\ \varrho x_2 &= x_0 x_1. \end{aligned}\right.$$

Zugleich tritt auch in den übrigen Verhältnissen eine entsprechende Reduction ein. Den unendlich fernen Punkten entspricht der umschriebene Kreis; zu sämmtlichen Parabeln durch die drei Hauptpunkte gehören die Tangenten an diesen Kreis. Der einem Strahl durch einen Hauptpunkt zugeordnete Punkt ergiebt sich als Durchschnitt der gegenüberliegenden Dreieckseite mit demjenigen Strahl aus demselben Hauptpunkte, welcher gegen die Halbirungslinie des Winkels an jener Dreiecksecke symmetrisch

---

*) Steiner, l. c., p. 269, 1,.

zu dem ersten Strahl liegt. Entsprechende Punkte sind die Durchschnittspunkte von symmetrisch gegen die Winkelhalbirungslinien gelegenen Strahlen durch die Hauptpunkte., Die sechs Halbirungslinien der Innen- und Aussenwinkel des Hauptdreiecks sind sich selbst entsprechende Gerade; als ihre Schnittpunkte bestimmen sie (abgesehen von den Hauptpunkten) sich selbst entsprechende Punkte, deren demnach vier existiren.

Einem Kegelschnitt durch zwei Hauptpunkte, z. B. durch ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$,) ($x_2 = 0$, $x_0 = 0$), mit der Gleichung

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{20}x_2x_0 + 2a_{01}x_0x_1 = 0$$

entspricht ein Kegelschnitt mit der Gleichung

$$a_{22}x_0x_1 + 2a_{12}x_2x_0 + 2a_{20}x_1x_2 + 2a_{01}x_2^2 = 0.$$

Letzterer geht daher gleichfalls durch jene Hauptpunkte, und wird, wenn

$$2a_{01} = a_{22},\ a_{12} = a_{20},$$

mit dem ersten identisch. Alle Curven zweiten Grades also, deren Gleichung die Form

$$x_2^2 + x_0x_1 + \varkappa(x_2x_0 + x_1x_2) = 0$$

besitzt, entsprechen sich selbst. Je zwei sich selbst entsprechende Kegelschnitte durch je zwei andere Hauptpunkte durchschneiden sich ausser in einem Hauptpunkte im Allgemeinen noch in drei weiteren Schnittpunkten, von denen offenbar einer immer reell sein muss und einer der vier sich selbst entsprechenden Punkte ist. Das Resultat, zu welchem man somit gelangt, ist folgendes:

XII. »*Sind die durch zwei Hauptpunkte gehenden Kegelschnitte so beschaffen, dass sie sich selbst entsprechen, so gehen sie zugleich durch die sich selbst entsprechenden Mittelpunkte derjenigen äusseren Berührungskreise des Hauptdreiecks, welche die Seite, auf der die beiden Hauptpunkte liegen, beide von innen berühren.*« Und umgekehrt: »*Die Kegelschnitte, welche durch je zwei Mittelpuncte der äussern Berührungskreise des Hauptdreiecks (d. i. durch zwei sich selbst entsprechende Punkte) und durch die auf der von beiden Kreisen jedesmal von innen berührten Seite gelegenen Hauptpunkte gehen, sind sich selbst entsprechend.*«

Auch sich selbst entsprechende Curven n^{ter} Ordnung existiren in gleichfalls unendlicher Anzahl. Zu einer Curve n^{ter} Ordnung, welche r_0-, r_1 r_2-fache Punkte in den Hauptpunkten besitzt, gehört nemlich nach dem Früheren, vorausgesetzt dass $r_0 + r_1 + r_2 = n$ und ausserdem die Gleichung (12) erfüllt ist, wieder eine Curve n^{ter} Ordnung, die in den Hauptpunkten auch r_0-, r_1-, r_2 fache Punkte hat. Nun liefert der Umstand, dass die Curve diese drei mehrfachen Punkte besitzt,

$$\frac{r_0(r_0+1)}{2} + \frac{r_1(r_1+1)}{2} + \frac{r_2(r_2+1)}{2}$$

Bedingungen; es bleiben also noch beliebig die übrigen zur vollkommen eindeutigen Bestimmung der Curve hinreichenden

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - \left[\frac{r_0(r_0+1)}{2} + \frac{r_1(r_1+1)}{2} + \frac{r_2(r_2+1)}{2}\right]$$

Bedingungen. Damit aber die Curve n^{ter} Ordnung sich selbst entspreche, müssen die Coefficienten ihrer Gleichung so beschaffen sein, dass durch Transformation der Gleichung mit Hilfe des Systems (13) dieselbe wieder zum Vorschein kommt. Dies wird nur dadurch zu erreichen sein, dass man bestimmte Coefficienten einander gleichsetzt. Eine Untersuchung der Anzahl und der Bedeutung dieser gleichzusetzenden Coefficienten würde, da sie sich stützt auf die Form der Gleichung einer Curve n^{ten} Grades, welche den gedachten Bedingungen genügt, hier zu weit führen; das sei nur noch bemerkt, dass, weil im Allgemeinen immer noch einige Coefficienten unbestimmt bleiben werden, man eine ganze Schaar von sich selbst entsprechenden Curven n^{ter} Ordnung wird construiren können. Auch wird sich leicht aus der Beschaffenheit der in der Gleichung n^{ten} Grades vorkommenden Glieder schliessen lassen, dass *alle sich selbst entsprechenden Curven n^{ter} Ordnung die sich selbst entsprechenden Punkte, wenigstens zum Theil, als einfache oder mehrfache Punkte in sich enthalten.*

§. 3. Betrachtung des Falles, in welchem die Hauptdreiecke vollkommen reell sind und eine continuirliche Veränderung ihrer Lage erleiden.

Bisher war bei allen Betrachtungen vorausgesetzt, dass die reellen Hauptpunkte in beiden Ebenen eine bestimmte feste Lage besitzen. Macht man aber die Annahme, dass die Hauptpunkte nach und nach ihre Lage verändern, indem sie bestimmte, vorgeschriebene Curven durchlaufen, so eröffnet sich ein ganz neues Feld der Untersuchung, und es entsteht die Frage, was für ein Gebilde in der ersten Ebene entspricht einem bestimmten Punkt, einer festen Geraden, einem Kegelschnitt, überhaupt einer gegebenen Curve in der andern Ebene. Diese Probleme wollen wir etwas ausführlicher behandeln, in der Weise, dass wir der Reihe nach in der einen Ebene erst einen, dann zwei, und zuletzt alle drei Hauptpunkte variiren lassen, während die Hauptpunkte in der andern Ebene einmal ihre feste Lage behalten, dann aber ebenfalls der Reihe nach sich auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen.

A. Die Hauptpunkte π_0, π_1, π_2 behalten ihre feste Lage.

I. Zwei Hauptpunkte in der Ebene P, z. B. p_2 *($x_0 = 0$, $x_1 = 0$)* und p_1 *($x_2 = 0$, $x_0 = 0$), sind fest und nur der dritte Hauptpunkt p ist beweglich,* und zwar

1. auf derjenigen Geraden, welche durch einen der andern Hauptpunkte, z. B. durch p_2, hindurchgeht, also auf der Geraden $x_1 = 0$. Der dritte Eckpunkt p des Hauptdreiecks bestimmt sich dann fortwährend als der Schnittpunkt der

Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 + \lambda x_0 = 0$, vorausgesetzt dass $x_2 = 0$ die feste Gerade bedeutet, welche durch die ursprüngliche Lage p_0 des dritten Hauptpunktes und durch den zweiten Hauptpunkt p_1 hindurchgeht; und das neue veränderliche Hauptreieck wird, wenn wir das Coordinatendreieck $p_0 p_1 p_2$ beibehalten, gebildet von den Seiten $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 + \lambda x_0 = 0$, wo λ alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. Die den Uebergang zu entsprechenden Gebilden vermittelnden Gleichungen (6) verwandeln sich daher in die folgenden:

$$\left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 & = y_1 y_2, & \varrho y_0 = x_1(x_2 + \lambda x_0), \\ \varrho x_1 & = y_2 y_0, & \varrho y_1 = (x_2 + \lambda x_0) x_0, \\ \varrho(x_2 + \lambda x_0) & = y_0 y_1, & \varrho y_2 = x_0 x_1, \end{array}\right.$$

welche nach den Coordinaten geordnet sich umsetzen zu dem System

$$(14) \quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 = y_1 y_2 & , & \varrho y_0 = x_1(x_2 + \lambda x_0), \\ \varrho x_1 = y_2 y_0 & , & \varrho y_1 = (x_2 + \lambda x_0) x_0, \\ \varrho x_2 = y_1(y_0 - \lambda y_2), & & \varrho y_2 = x_0 x_1 . \end{array}\right.$$

Offenbar gelten die auf die Hauptdreiecke bezüglichen Sätze, welche oben entwickelt wurden, unverändert auch hier; nur mit Bezug auf das alte feste Coordinatendreieck erleiden dieselben mancherlei Modificationen. So entpricht jetzt der Seite $y_0 = 0$ das System der Geraden $x_1 = 0$ und des Strahlbüschels durch den Punkt p_1 ($x_0 = 0$, $x_2 = 0$), mithin die dem Büschel $x_2 + \lambda x_0 = 0$ perspektivische Punktreihe auf der Seite $x_1 = 0$ (anstatt des früher ihr zugehörigen Punktes p_0); der Seite $y_1 = 0$ entspricht das von demselben Strahlbüschel durch p_1 und von der Geraden $x_0 = 0$ gebildete Punktsystem, also der Mittelpunkt p_1 des Büschels selbst; der Seite $y_2 = 0$ endlich wie früher der Punkt p_2. Umgekehrt bildet sich in der Π Ebene die Seite $x_0 = 0$ ab in dem Punkt π_0, die Seite $x_1 = 0$ in dem Punkt π_1, wie vorher; dagegen die Seite $x_2 = 0$ in dem System der Geraden $y_1 = 0$ und $y_0 - \lambda y_2 = 0$, d. i. in der Punktreihe auf der Seite $y_1 = 0$, welche von dem Strahlbüschel mit dem Centrum π_1 festgelegt wird.

Einer beliebigen Geraden in der P Ebene

$$(15) \quad a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

entspricht in der Π Ebene die Linie

$a_0 y_1 y_2 + a_1 y_2 y_0 + a_2 y_1(y_0 - \lambda y_2) = 0$ oder $(a_0 - \lambda a_2) y_1 y_2 + a_1 y_2 y_0 + a_2 y_0 y_1 = 0$, d. h. eine Schaar von Kegelschnitten, welche durch die Schnittpunkte der beiden zerfallenden

$$(a_0 y_1 + a_1 y_0) y_2 = 0 \quad \text{und} \quad y_1(y_0 - \lambda y_2) = 0,$$

also durch die drei Hauptpunkte π_0, π_1, π_2 und durch einen von dem Durchschnitt der Geraden $\frac{y_1}{a_1} + \frac{y_0}{a_0} = 0$ und $y_0 - \lambda y_2 = 0$ bestimmten Punkt, der je nach dem Werthe von λ variirt, hindurchgehen. Es gehört daher, solange der letztere Schnittpunkt

innerhalb des Hauptdreiecks π_0, π_1, π_2 liegt, was der Fall, wenn λ einen positiven und a_0 und a_1 einander im Zeichen entgegengesetzte Werthe besitzen, zu einer Geraden in der P Ebene eine Schaar Hyperbeln in der Ebene Π. — Dem Strahl $a_0x_0 + a_1x_1 = 0$ entspricht das System der Geraden $y_2 = 0$, $\frac{y_0}{a_0} + \frac{y_1}{a_1} = 0$, wie vorher; dagegen dem Strahl $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ die Linien $a_1y_2y_0 + a_2y_1y_0 - \lambda a_1y_1y_2 = 0$, mithin eine Schaar von Kegelschnitten, die dem Hauptdreieck $\pi_0\pi_1\pi_2$ umschrieben sind; und dem Strahl $a_2x_2 + a_0x_0 = 0$ das System der Geraden $y_1 = 0$, $a_2y_0 + (a_0 - \lambda a_2)y_2 = 0$, nemlich die Punktreihe auf der Seite $y_1 = 0$.

Umgekehrt ist einer Geraden (7) in der Ebene Π in der Ebene P zugeordnet das Liniensystem

$$b_0x_1(x_2+\lambda x_0)+b_1(x_2+\lambda x_0)x_0+b_2x_0x_1=0$$
$$\text{oder}\quad b_0x_1x_2+b_1x_2x_0+b_2x_0x_1+\lambda(b_0x_1x_0+b_1x_0^2)=0,$$

d. i. eine Schaar von Kegelschnitten, welche durch die Schnittpunkte des dem Coordinatendreieck $p_0p_1p_2$ umschriebenen Kegelschnitts $b_0x_1x_2 + b_1x_2x_0 + b_2x_0x_1 = 0$ mit dem System der Geraden $x_0 = 0$, $b_0x_1 + b_1x_0 = 0$ gehen, nemlich durch die beiden Hauptpunkte p_1 und p_2 und durch einen Punkt auf der Geraden $b_0x_1 + b_1x_0 = 0$. Zu der Geraden $b_0y_0 + b_1y_1 = 0$ gehört das Strahlsystem ($b_0x_1 + b_1x_0 = 0$, $x_2 + \lambda x_0 = 0$) oder vielmehr die auf der Geraden $\frac{x_0}{b_0} + \frac{x_1}{b_1} = 0$ liegende Punktreihe; zu dem Strahl $b_1y_1 + b_2y_2 = 0$ das Geradenpaar ($x_0 = 0$, $b_1x_2 + b_2x_1 + \lambda b_1x_0 = 0$) oder die Punktreihe auf der Seite $x_0 = 0$; und zu dem Strahl $b_2y_2 + b_0y_0 = 0$ das Geradenpaar ($x_1 = 0$, $b_0x_2 + (b_2 + \lambda b_0)x_0 = 0$) oder die Punktreihe auf der Seite $x_1 = 0$.

Einem Punkt der Ebenen P oder Π, der sich durch den Durchschnitt zweier Geraden bestimmt, entspricht im Allgemeinen die Punktreihe, in welcher sich die zwei den Geraden zugeordneten Kegelschnittbüschel durchschneiden; und beachtet man, dass jeder Punkt auch als Durchschnitt von Strahlen durch die Coordinatendreieckseckpunkte aufgefasst werden kann, so ergibt sich mit Bezug auf die soeben gewonnenen Resultate, dass die den Punkten zugeordneten Punktreihen sämmtlich auf geraden Linien liegen.

Zu einem Kegelschnitt

$$a_0x_1x_2 + a_1x_2x_0 + a_2x_0x_1 = 0$$

gehört die Curvenschaar

$$a_0y_0(y_0 - \lambda y_2) + a_1y_1(y_0 - \lambda y_2) + a_2y_2y_0 = 0,$$

mithin eine Kegelschnittschaar durch die Punkte π_1 und π_2; und zu einem Kegelschnitt

$$b_0y_1y_2 + b_1y_2y_0 + b_2y_0y_1 = 0,$$

das System

$$b_0x_0 + b_1x_1 + b_2(x_2 + \lambda x_0) = 0,$$

d. i. ein Geradenbüschel durch den Punkt ($x_0 = 0$, $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$).

Diese Fälle lassen sich zusammenstellen zu dem allgemeinen Resultat:

XIII. »Punkten sind zugeordnet Punktreihen; Geraden im Allgemeinen Kegelschnittschaaren, und zwar Geraden in der Ebene P Kegelschnitte durch die drei Hauptpunkte

in der Ebene II, Geraden in der Ebene II Kegelschnitte in der Ebene P, welche sämmtlich nur durch diejenigen zwei Coordinatendreieckseckpunkte hindurchgehen, welche zugleich Hauptpunkte sind. Kegelschnitten durch die Coordinatendreieckseckpunkte in der P-Ebene entsprechen Kegelschnittschaaren durch nur zwei Hauptpunkte in der Ebene II, Kegelschnitten durch die Hauptpunkte der Ebene II Strahlenbüschel in der Ebene P. Curven n^{ter} Ordnung bilden sich im Allgemeinen ab als Schaaren von Curven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung.«

Rückt der veränderliche Hauptpunkt p in den Coordinatendreieckseckpunkt p_0, so tritt der vorher ausführlich betrachtete Fall des festen Hauptdreiecks $p_0p_1p_2$ ein, für welches sämmtliche Gleichungen hier gelten, wenn in ihnen λ den Werth 0 erhält.

2. Aehnlich gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Punkt p gezwungen ist, eine beliebig gegebene Gerade

$$(15) \qquad a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

zu durchlaufen. Wählt man in diesem Fall zu den Eckpunkten des Coordinatendreiecks einen Punkt p_0 in der Geraden (15) und die beiden festen Hauptpunkte p_1 und p_2, so wird die beliebig gegebene Gerade (15) als Gerade durch p_0 eine Gleichung von der Form $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ besitzen, und der bewegliche Hanptpunkt p stets als Schnittpunct der beiden Strahlen

$$(16) \qquad x_2 + \lambda x_0 = 0,\ x_1 + \mu x_0 = 0$$

aufzufassen sein, wenn die Parameter λ und μ an die Bedingung geknüpft sind, dass der Durchschnittspunkt der Geraden (16) in der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ liegt, was nur möglich, falls

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ \lambda & 0 & 1 \\ \mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$a_1\mu + a_2\lambda = 0,$$

also

$$(17) \qquad \mu = -\frac{a_2}{a_1}\lambda$$

ist.

Das bewegliche Hauptdreieck pp_1p_2 wird von den Seiten $x_0 = 0,\ x_1 + \mu x_0 = 0, x_2 + \lambda x_0 = 0$ gebildet, es bestehen deshalb mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) die Relationen

$$\begin{cases} \varrho x_0 = y_1y_2, & \varrho y_0 = (x_1 + \mu x_0)\,(x_2 + \lambda x_0), \\ \varrho(x_1 + \mu x_0) = y_2y_0, & \varrho y_1 = (x_2 + \lambda x_0).\ x_0, \\ \varrho(x_2 + \lambda x_0) = y_0y_1, & \varrho y_2 = x_0\ .\ (x_1 + \mu x_0), \end{cases}$$

welche durch eine kleine Transformation verwandelt werden in das System

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = y_1 \cdot y_2 \quad , & \varrho y_0 = (x_1 + \mu x_0)(x_2 + \lambda x_0), \\ \varrho x_1 = y_2(y_0 - \mu y_1), & \varrho y_1 = (x_2 + \lambda x_0) \cdot x_0 \quad , \\ \varrho x_2 = y_1(y_0 - \lambda y_2), & \varrho y_2 = \quad x_0 \quad \cdot (x_1 + \mu x_0). \end{cases}$$

Aus der Aehnlichkeit der Gleichungen (14) und (18) folgt sofort, dass die Art und Weise des Entsprechens der geometrischen Gebilde in diesem Fall wesentlich mit dem soeben behandelten übereinstimmt.

3. Ist der Punkt p gezwungen, sich auf dem dem Coordinatendreieck $p_0p_1p_2$ umschriebenen Kegelschnitt

$$(19)\qquad a_0x_1x_2 + a_1x_2x_0 + a_2x_0x_1 = 0$$

zu bewegen, so müssen in den Gleichungen (16) λ und μ solche Werthe besitzen, dass der Durchschnittspunkt der Geraden (16) auf dem Kegelschnitt (19) liegt. Aus (16) gehen für x_2 und x_1 die Werthe $-\lambda x_0$, resp. $-\mu x_0$ hervor; substituirt man diese in (19) und dividirt durch x_0^2, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$a_0\mu\lambda - a_1\lambda - a_2\mu = 0,$$

aus welcher für μ folgt:

$$(20)\qquad \mu = \frac{a_1\lambda}{a_0\lambda - a_2}\ .$$

Die Substitutionsgleichungen (18) sind auch jetzt noch gültig, nur hat in ihnen für diesen Fall μ den in (20) angegebenen Werth.

4. Wird endlich der Punkt p der Bedingung unterworfen, sich auf einer beliebigen Curve

$$(21)\qquad f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

zu bewegen, so müssen in den Gleichungen (16) λ und μ so beschaffen sein, dass letztere Gleichungen mit (21) zusammen bestehen können, die aus den Gleichungen (16) resultirenden Werthe für x_1, x_2 müssen also in die Gleichung (21) substituirt diese identisch erfüllen. Es wird im Allgemeinen, wenn die Gleichung (21) vom n^{ten} Grade ist, die so erzielte Bedingungsgleichung zwischen λ und μ ebenfalls vom n^{ten} Grade sein, sie wird zu einem Werthe λ daher n Werthe für μ liefern. Geometrisch wird diese anscheinende Mehrdeutigkeit erklärt dadurch, dass eine Gerade $x_2 + \lambda x_0 = 0$ die Curve (21) im Allgemeinen in n Punkten schneidet, von denen jeder eine bestimmte Lage des Punktes p repräsentirt, welche sich bestimmt durch den Durchschnitt der Geraden $x_2 + \lambda x_0 = 0$ mit je einer der n Geraden $x_1 + \mu x_0 = 0$. Gibt man dem μ nur einen von den n Werthen, so wird durch die allmähliche Variation des Punktes p auf der Curve n^{ten} Grades offenbar μ nach und nach auch die übrigen $n - 1$ Werthe, zuletzt wieder

den ersten Werth annehmen. Die Gleichungen (18) sind jetzt ebenfalls in vollem Masse, gültig, nur besitzt μ einen der aus den Gleichungen (16) und (21) hervorgehenden Werthe*).

*) Es mag hier noch kurz erwähnt werden, welche Aenderung in der von Steiner angestellten Betrachtung durch die Annahme eines beweglichen Hauptpunktes veranlasst wird. Um dabei die Steiner'schen Bezeichnungen und namentlich die in seinem schon öfters citirten Werke auf Tafel IV. gegebene Figur 55 beibehalten zu können, muss bemerkt werden, dass statt der Zeichen P, Π, x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, p_0, p_1, p_2, π_0, π_1, π_2 hier dort die entsprechenden E, E_1, y, x, z, s_1, t_1, r_1, s, t, r, y_1, x_1, z_1 im Gebrauch sind.

Soll nun in einer der Ebenen, z. B. analog dem hier unter I. betrachteten Falle in der Ebene E, ein Hauptpunkt, s, variiren, während die übrigen Hauptpunkte sämmtlich ihre feste Lage behalten, so wird dies nur in der Art möglich sein, dass man den Punkt s, also den Durchschnitt der Axe $\mathfrak{A}_1$ mit der Ebene E, auf der Geraden $x_1 r$ oder x sich bewegen, ihn die Punktreihe x durchlaufen lässt; die Axe $\mathfrak{A}_1$ wird alsdann ein zu der Punktreihe x perspektivisches Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte y_1 beschreiben. In dem Fundamentaldreieck (Hauptdreieck) tsr behalten nur noch die Seiten y und x ihre feste Lage, die Gerade z dagegen wird vertreten durch ein der Punktreihe s und somit auch dem Büschel $\mathfrak{A}_1$ perspektivisches Strahlsystem mit dem Mittelpunkt t. Es gelten deshalb, wie unmittelbar einleuchtet, die schon oben gefundenen Resultate: Der Seite s_1 entspricht die Punktreihe s (die Gerade x), der Seite t_1 entspricht wie früher der Punkt t, der Seite r_1 der Punkt r; der Seite y wie früher der Punkt y_1, der Seite x der Punkt x_1, dem Strahlbüschel z die Punktreihe t_1. Umgekehrt dem Punkt y_1 ist zugeordnet die Seite y, dem Punkte x_1 die Seite x, dem Punkt z_1 das Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt t; dem Punkt t die Seite t_1, dem Punkt r die Seite r_1, der Punktreihe s die Seite s_1. Zu einem beliebig gegebenen Punkt a in der Ebene E findet man das entsprechende Gebilde, wenn man die Durchschnittslinien der Ebene $(a\mathfrak{A})$ mit der Ebenenschaar $(a\mathfrak{A}_1)$, welche ein Strahlsystem mit dem Mittelpunkt a bilden, construirt, und deren Schnittpunkte mit der Ebene E_1 bestimmt. Letztere bilden eine continuirliche Punktreihe auf der Geraden $z_1 r$, wie aus der von Steiner (l. c., p. 255, unten) angegebenen Construktion des zu a gehörigen Punktes durch Ziehen gerader Linien in den Ebenen E, E_1 sofort hervorgeht. Es entspricht somit einem Punkt in der Ebene E eine Punktreihe in der Ebene E_1; dass auch umgekehrt einem Punkt in der Ebene E_1 eine Punktreihe in der Ebene E entspricht, kann durch einen ähnlichen Beweis dargethan werden. Ferner gehört zu einer Geraden A in der Ebene E ein System von Kegelschnitten durch die drei Hauptpunkte x_1, y_1, z_1 in der Ebene E_1. Für eine bestimmte Lage von $\mathfrak{A}_1$ nemlich liegen alle Projektionsstrahlen, welche die Gerade A treffen, in einem einfachen Hyperboloide, welches die Ebene E in einem Kegelschnitt der genannten Schaar schneidet; variirt nun der Punkt s continuirlich, so durchläuft $\mathfrak{A}_1$ nacheinander sämmtliche Strahlen des Büschels y_1 und es erzeugen die sämmtlichen Systeme der Projektionsstrahlen durch die Geraden A, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ eine continuirliche Reihe von Hyperboloiden, welche die Ebene E_1 in einer continuirlichen Schaar von Kegelschnitten durch die drei Hauptpunkte x_1, y_1, z_1 schneiden. Umgekehrt entspricht einer Geraden in der Ebene E_1 eine Schaar von Kegelschnitten in der Ebene E, welche durch die zwei festen Hauptpunkte t und r und der Reihe nach durch alle Punkte der Punktreihe s hindurchgehen. Gehen die Geraden durch die Hauptpunkte, so tritt auch hier die oben erwähnte Reduction ein. Der Beweis endlich für den Satz, dass einer Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen eine Schaar von Curven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht, ist wesentlich der von Steiner für eine bestimmte Lage der Geraden $\mathfrak{A}_1$ gegebene, nur dass hier statt eines festen Hyperboloides in Folge der Variation der Axe $\mathfrak{A}_1$ eine continuirliche Schaar von Hyperboloiden auftritt.

Dass auch die im Folgenden betrachteten Fälle mehrerer variabler Hauptpunkte auf eine ähnliche Weise behandelt werden können, wenn man nur die Axen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ entsprechend variiren lässt, ist wohl selbstverständlich.

II. Ist nur ein Hauptpunkt $p_2(x_0 = 0, x_1 = 0)$ fest und bewegen sich die beiden andern auf bestimmten Curven, so werden sich die unter I, angeführten Sätze noch verallgemeinern.)*

1. Die Hauptpunkte p und p' sind gezwungen, sich beide auf der Geraden $x_1 = 0$ zu bewegen; als Schnittpunkte letzterer mit den Geraden

$$x_1 + \lambda x_0 = 0, \text{ resp. } x_0 + \mu x_1 = 0$$

sind sie vollkommen bestimmt. Sie bilden mit dem dritten Hauptpunkt p_2 zusammen das Hauptdreieck $(x_2 = 0, x_1 + \lambda x_0 = 0, x_0 + \mu x_1 = 0)$; und deshalb bestehen die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{lll} \varrho(x_0 + \mu x_1) = y_1 y_2, & \varrho y_0 = (x_1 + \lambda x_0) x_2 & , \\ \varrho(x_1 + \lambda x_0) = y_2 y_0, & \varrho y_1 = x_2 \,.\, (x_0 + \mu x_1), & \\ \varrho x_2 = y_0 y_1, & \varrho y_2 = (x_0 + \mu x_1)\,(x_1 + \lambda x_0), & \end{array}\right.$$

die geordnet das System

$$(22) \quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 = \frac{y_2}{1-\lambda\mu}(y_1 - \mu y_2), & \varrho y_0 = (x_1 + \lambda x_0) \,.\, x_2 & , \\ \varrho x_1 = \frac{y_2}{1-\lambda\mu}(y_0 - \lambda y_1), & \varrho y_1 = x_2 \,.\, (x_0 + \mu x_1), & \\ \varrho x_2 = y_0 y_1 & , \quad \varrho y_2 = (x_0 + \mu x_1)\,(x_1 + \lambda x_0) & \end{array}\right.$$

liefern, welches eine gewisse Aehnlichkeit mit den Gleichungen (18) besitzt; nur ist μ hier durchaus unabhängig von λ. Zufolge (22) entspricht der Seite $y_0 = 0$ ein Strahlbüschel $x_1 + \lambda x_0 = 0$ und die Gerade $x_2 = 0$, mithin die Punktreihe auf $x_2 = 0$; ebenso der Seite $y_1 = 0$ die von einem andern Parameter abhängige Punktreihe auf derselben Seite $x_2 = 0$; dagegen der Seite $y_2 = 0$ entspricht ein doppeltes Strahlbüschel durch den Punkt $p_2, x_0 + \mu x_1 = 0$ und $x_1 + \lambda x_0 = 0$, oder dieser Punkt selbst. Zu der Seite $x_0 = 0$ gehört das Strahlbüschel durch den Punkt π_1 oder dieser Punkt selbst, zu der Seite $x_1 = 0$ die Punktreihe auf $y_2 = 0$; zu der Seite $x_2 = 0$ wie früher der Punkt π_2, was auch unmittelbar einleuchtet, da $x_2 = 0$ noch wie vorher stets die dem unveränderlichen Hauptpunkte p_2 gegenüberliegende Hauptdreiecksseite bleibt.

Eine Gerade (7) in der Ebene II bildet sich in der P Ebene ab durch ein System von Kegelschnittschaaren:

$$b_0 x_1 x_2 + b_1 x_2 x_0 + b_2 x_0 x_1 + \lambda(b_0 x_0 x_2 + b_2 x_0^2) + \mu(b_1 x_1 x_2 + b_2 x_1^2) + \mu\lambda b_1 x_0 x_1 = 0,$$

welche sämmtlich durch den festen Hauptpunkt p_2 gehen und netzförmig die ganze P Ebene bedecken.

*) In speciellen Fällen wird man hier die gewonnenen Resultate dadurch wesentlich vereinfachen können, dass man p_2 den einen Eckpunkt des in der Ebene P gelegenen Coordinatendreiecks bilden lässt, während die beiden andern Ecken p_0 und p_1 auf den Curven, welche die beweglichen Hauptpunkte durchlaufen, angenommen werden, und dass man dieses Coordinatendreieck dem Hauptdreieck $\pi_0 \pi_1 \pi_2$ womöglich ähnlich, oder vielmehr, wenn es irgend mit der Beschaffenheit der Curven und der Lage des Punktes p_2 verträglich ist, congruent macht; es würden dann die oben erwähnten Beziehungen bei passender Aufeinanderlegung der Ebenen P und II eintreten.

In gleicher Weise entspricht einer Geraden (15) in der P Ebene ein Netz von Kegelschnitten in der Ebene Π:

$$a_0y_1y_2 + a_1y_2y_0 + a_2y_0y_1\ (1 - \lambda\mu) - \lambda a_1y_1y_2 - \mu a_0y_0^2 = 0,$$

welche durch die beiden Hauptpunkte π_0 und π_1, durch den Punkt π_2 aber nur im Falle $a_0 = 0$ hindurchgehen. Das dem Strahl $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ entsprechende Kegelschnittnetz besteht daher allein aus lauter dem Hauptdreieck umschriebenen Kegelschnitten.

Zu einem Punkte, welcher sich durch den Schnitt zweier Geraden bestimmt, gehört ein System von Punkten, welches durch den Durchschnitt der den beiden Geraden zugeordneten Kegelschnittnetze entsteht.

Ein Kegelschnitt (19) bildet sich ab in einem Netz von Curven dritter Ordnung:

$$a_0y_0y_1\ (y_0 - \lambda y_1)(1 - \lambda\mu) + a_1y_0y_1(y_1 - \mu y_2)(1 - \lambda\mu) + a_2y_2(y_1 - \mu y_2)(y_0 - \lambda y_1) = 0,$$

welche sämmtlich durch die Hauptpunkte π_0 und π_1 gehen, durch den dritten Hauptpunkt π_2 aber nur, wenn $a_2 = 0$, d. h. wenn der Kegelschnitt (19) zerfällt in das System der beiden Geraden $x_2 = 0$ und $\frac{x_0}{a_0} + \frac{x_1}{a_1} = 0$.

Einem Kegelschnitt in der Π Ebene,

$$(23) \qquad b_0y_1y_2 + b_1y_2y_0 + b_2y_0y_1 = 0,$$

entspricht in der P Ebene das Curvennetz

$$b_0x_2(x_0 + \mu x_1)^2(x_1 + \lambda x_0) + b_1(x_0 + \mu x_1)\ (x_1 + \lambda x_0)^2x_2 + b_2(x_1 + \lambda x_0)x_2^2(x_0 + \mu x_1) = 0$$

oder

$$b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \mu . b_0x_1 + \lambda . b_1x_0 = 0,$$

also ein Netz von Geraden, gebildet von den beiden Strahlbüscheln mit den Mittelpunkten

$$(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0,\ x_1 = 0) \quad \text{und} \quad (b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0,\ x_0 = 0).$$

Curven n^{ter} Ordnung sind im Allgemeinen Netze von Curven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung zugeordnet.

Die Werthe $\lambda = 0$, $\mu = 0$ führen wiederum zu dem Fall des festen Hauptdreiecks $p_0p_1p_2$.

2. Der Punkt p sei gezwungen, sich auf der Geraden $x_1 = 0$ zu bewegen, auf welcher er durch den Schnitt mit der Geraden $x_2 + \mu x_0 = 0$ bestimmt wird, der Punkt p' auf der Geraden $x_0 = 0$, auf dieser durch die Gerade $x_2 + \lambda x_1 = 0$ festgelegt. Das neue veränderliche Hauptdreieck wird dann begrenzt von den Seiten $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 + \mu x_0 + \lambda x_1 = 0$, und es gelten die Relationen:

$$\left\{\begin{array}{llll} \varrho x_0 & = y_1y_2, & \varrho y_0 = x_1(x_2 + \mu x_0 + \lambda x_1), \\ \varrho x_1 & = y_2y_0, & \varrho y_1 = (x_2 + \mu x_0 + \lambda x_1)\, x_0, \\ \varrho(x_2 + \mu x_0 + \lambda x_1) & = y_0y_1, & \varrho y_2 = x_0x_1, \end{array}\right.$$

aus welchen man die dem System (22) analogen Gleichungen

$$(24)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = y_1 y_2 & , \quad \varrho y_0 = x_1 (x_2 + \mu x_0 + \lambda x_1), \\ \varrho x_1 = y_2 y_0 & , \quad \varrho y_1 = (x_2 + \mu x_0 + \lambda x_1) x_0, \\ \varrho x_2 = y_0 y_1 - \mu y_1 y_2 - \lambda y_2 y_0 & , \quad \varrho y_2 = x_0 x_1 \end{cases}$$

herleitet. Mit Hilfe der letzteren gelangt man leicht zu den eben entwickelten ganz ähnlichen Resultaten.

3. Sind p und p' gezwungen, auf beliebig gegebenen Curven, z. B.

$$(25)\quad f_0(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad \textit{resp.} \quad f_1(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

sich zu bewegen, so bestimmen sich die Punkte p und p' bei Beibehaltung der ursprünglichen Coordinatendreiecke jederzeit als Schnittpunkte der Geraden

$$(26)\quad \begin{cases} x_1 + \lambda x_0 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 + \mu x_0 = 0, \\ \textit{resp.}\ x_0 + \lambda' x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 + \mu' x_1 = 0, \end{cases}$$

wo λ und μ, resp. λ' und μ' (ganz analog dem λ und μ auf Seite 15, 3. und 4.) durch die Gleichungen (25) und (26) mit einander zusammenhängen, in der Weise, dass je einem Werth von λ oder λ' eine bestimmte, dem Grade der Gleichungen (25) gleiche Anzahl von Werthen μ resp. μ' zugehört. In diesem Falle gelten offenbar die Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho(x_0 + \lambda' x_1) = y_1 y_2, & \varrho y_0 = (x_1 + \lambda x_0)(x_2 + \mu x_0 + \mu' x_1), \\ \varrho(x_1 + \lambda x_0) = y_2 y_0, & \varrho y_1 = (x_2 + \mu x_0 + \mu' x_1)(x_0 + \lambda' x_1), \\ \varrho(x_2 + \mu x_0 + \mu' x_1) = y_0 y_1, & \varrho y_2 = (x_0 + \lambda' x_1)(x_1 + \lambda x_0), \end{cases}$$

aus welchen man die folgenden ableitet:

$$(27)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = \frac{y_2}{1 - \lambda\lambda'}(y_1 - \lambda' y_0) & , \quad \varrho y_0 = (x_1 + \lambda x_0)(x_2 + \mu x_0 + \mu' x_1), \\ \varrho x_1 = \frac{y_2}{1 - \lambda\lambda'}(y_0 - \lambda y_1) & , \quad \varrho y_1 = (x_2 + \mu x_0 + \mu' x_1)(x_0 + \lambda' x_1), \\ \varrho x_2 = y_0 y_1 - \frac{\mu - \mu'\lambda}{1 - \lambda\lambda'} y_1 y_2 - \frac{\mu' - \mu\lambda'}{1 - \lambda\lambda'} y_2 y_0, & \varrho y_2 = (x_0 + \lambda' x_1)(x_1 + \lambda x_0) \end{cases}.$$

Für $\lambda = \lambda' = 0$ gehen dieselben in das System (6) über.

III. Ist auch der letzte Hauptpunkt variabel, so treten noch allgemeinere Verhältnisse auf.

Es genüge, hier sogleich den allgemeinsten Fall vorzuführen, in welchem die drei Hauptpunkte p, p', p'' gezwungen sind, sich zu bewegen auf den Curven

$$f_0(x_0, x_1, x_2) = 0, \textit{ resp } f_1(x_0, x_1, x_2) = 0, f_2(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Bei Beibehaltung der alten Coordinatendreiecke erhalten die die Hauptpunkte festlegenden Strahlen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x_1+\lambda_0 x_0=0 \\ x_2+\mu_0 x_0=0 \end{array}\right\}, resp. \left.\begin{array}{l} x_2+\mu_1 x_1=0 \\ x_0+\lambda_1 x_1=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x_0+\mu_2 x_2=0 \\ x_1+\lambda_2 x_2=0 \end{array}\right\}.$$

Das Hauptdreieck $pp'p''$ wird gebildet von den Seiten

$$x_0+\mu_2 x_2+\frac{\lambda_1+\mu_1\mu_2}{1-\lambda_2\mu_1}(x_1+\lambda_2 x_2)=0\ ,$$
$$x_1+\lambda_0 x_0+\frac{\lambda_2+\lambda_0\mu_2}{1-\mu_0\mu_2}(x_2+\mu_0 x_0)=0\ ,$$
$$x_2+\mu_1 x_1+\frac{\mu_0+\lambda_0\mu_1}{1-\lambda_0\lambda_1}(x_0+\lambda_1 x_1)=0$$

und entspricht in der oben erwähnten Weise dem Hauptdreieck $\pi_0\pi_1\pi_2$, so dass, wenn man die Hauptdreiecksseiten $p'p''$, $p''p$, pp' kürzer durch

$$u_0\equiv e_{00}x_0+e_{10}x_1+e_{20}x_2=0,\ u_1\equiv e_{01}x_0+e_{11}x_1+e_{21}x_2=0,$$
$$u_2\equiv e_{02}x_0+e_{12}x_1+e_{22}x_2=0$$

bezeichnet, die Relationen

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho(e_{00}x_0+e_{10}x_1+e_{20}x_2)=y_1y_2\ , & \varrho y_0=u_1u_2\ , \\ \varrho(e_{01}x_0+e_{11}x_1+e_{21}x_2)=y_2y_0\ , & \varrho y_1=u_2u_0\ , \\ \varrho(e_{02}x_0+e_{12}x_1+e_{22}x_2)=y_0y_1\ , & \varrho y_2=u_0u_1 \end{array}\right.$$

existiren, aus welchen die Gleichungen

$$(28)\quad \left.\begin{array}{ll} \varrho x_0=y_1y_2\,.\,E_{00}+y_2y_0\,.\,E_{10}+y_0y_1\,.\,E_{02}\ , & \varrho y_0=u_1u_2\ , \\ \varrho x_1=y_1y_2\,.\,E_{10}+y_2y_0\,.\,E_{11}+y_0y_1\,.\,E_{12}\ , & \varrho y_1=u_2u_0\ , \\ \varrho x_2=y_1y_2\,.\,E_{20}+y_2y_0\,.\,E_{21}+y_0y_1\,.\,E_{22}\ , & \varrho y_2=u_0u_1 \end{array}\right.$$

hervorgehen; in ihnen bedeuten die E_{ix} die zu den Elementen e_{ix} gehörigen Unterdeterminanten. —

B. Die Hauptpunkte π_0, π_1, π_2 verändern gleichfalls ihre Lage.

Man wird unter dieser Voraussetzung mehrere, im Ganzen 9, Fälle zu unterscheiden haben; es werden nemlich, einmal während nur einer der Hauptpunkte p, dann während zwei Hauptpunkte p, zuletzt während alle drei Hauptpunkte in der Ebene P variiren, der Reihe nach erst ein Hauptpunkt, dann zwei Hauptpunkte, endlich alle drei Hauptpunkte π ihre Lage verändern können. *Dabei wird man im Allgemeinen zu Resultaten gelangen, durch welche die unter A, gefundenen Beziehungen in ähnlicher Weise verallgemeinert werden, wie durch letztere die anfänglich* (§§. 1 und 2) *aufgestellten Sätze.*

Es möge hier genügen, nur für drei Fälle den Gang der Untersuchung anzugeben.

1. Der Punkt π_0 sei gezwungen, sich auf einer beliebigen Geraden (7) zu bewegen, während π_1 und π_2 ihre feste Lage beibehalten; in der PEbene sei nur der Punkt p_0 beweglich, und zwar auf der Geraden (15). Nimmt man die Anfangslagen der Haupdreiecke $p_0p_1p_2$ und $\pi_0\pi_1\pi_2$ zu festen Coordinatendreiecken in den bezüglichen Ebenen, so reduciren sich die Gleichungen (7) und (15), ohne dadurch der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun, auf Gleichungen von der Form

$$b_1y_1 + b_2y_2 = 0, \quad \text{resp.} \quad a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Der Punkt p legt sich, wie oben, durch die Strahlen

$$(16) \qquad x_2 + \lambda x_0 = 0\ ,\ x_1 + \mu x_0 = 0\ ,\ \left(\mu = -\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)$$

fest, der Punkt π dem entsprechend durch die Strahlen

$$(29) \qquad y_2 + \sigma y_0 = 0\ ,\ y_1 + \tau y_0 = 0\ ,\ \left(\tau = -\frac{b_2}{b_1}\sigma\right);$$

und es gelten für die jeweiligen Hauptdreiecke ($x_0 = 0$, $x_1 + \mu x_0 = 0$, $x_2 + \lambda x_0 = 0$ und ($y_0 = 0$, $y_1 + \tau y_0 = 0$, $y_2 + \sigma y_0 = 0$) die Gleichungen

$$(30)\begin{cases} \varrho x_0 = (y_1 + \tau y_0)(y_2 + \sigma y_0), & \varrho y_0 = (x_1 + \mu x_0)(x_2 + \lambda x_0), \\ \varrho(x_1 + \mu x_0) = (y_2 + \sigma y_0) \cdot y_0\ , & \varrho(y_1 + \tau y_0) = (x_2 + \lambda x_0) \cdot x_0\ , \\ \varrho(x_2 + \lambda x_0) = y_0 \cdot (y_1 + \tau y_0), & \varrho(y_2 + \sigma y_0) = x_0 \cdot (x_1 + \mu x_0), \end{cases}$$

oder auch

$$(31)\begin{cases} \varrho x_0 = (y_1 + \tau y_0)(y_2 + \sigma y_0)\ , & \varrho y_0 = (x_1 + \mu x_0)(x_2 + \lambda x_0)\ , \\ \varrho x_1 = (y_2 + \sigma y_0)(y_0(1 - \mu\tau) - \mu y_1), & \varrho y_1 = (x_2 + \lambda x_0)(x_0(1 - \mu\tau) - \tau x_1)\ , \\ \varrho x_2 = (y_1 + \tau y_0)(y_0(1 - \lambda\sigma) - \lambda y_2), & \varrho y_2 = (x_1 + \mu x_0)(x_0(1 - \lambda\sigma) - \sigma x_2)\ . \end{cases}$$

Den Seiten $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ entsprechen die beiden Strahlbüschel (29), resp. (16), oder das System der Schnittpunkte derselben, d. s. die Geraden $b_1y_1 + b_2y_2 = 0$, resp. $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$; den andern Coordinatendreiecksseiten gehören Systeme von je zwei Strahlbüscheln zu, welche sich in bestimmten Curven schneiden — speciell in Kegelschnitten mit den Gleichungen $y_1y_2 - y_0^2 = 0$ (entsprechend den Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$), und $x_1x_2 - x_0^2 = 0$ (entsprechend den Seiten $y_1 = 0$, $y_2 = 0$), wenn

$$\sigma = \pm\frac{\mu}{\mu\tau - 1}, \text{ resp. } \tau = \pm\frac{\lambda}{\lambda\sigma - 1};\ \lambda = \pm\frac{\tau}{\mu\tau - 1},\ \mu = \pm\frac{\sigma}{\lambda\sigma - 1};$$

und in zwei sich schneidenden Geraden $y_0(y_1 - y_2) = 0$ (entsprechend den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) und $x_0(x_1 - x_2) = 0$ (entsprechend den Seiten $y_1 = 0$, $y_2 = 0$), wenn

$$\sigma = \frac{\mu\tau - 1}{\mu}\ ,\ \text{resp. } \tau = \frac{\lambda\sigma - 1}{\lambda};\ \lambda = \frac{\mu\tau - 1}{\tau},\ \mu = \frac{\lambda\sigma - 1}{\sigma}.$$

Sonst bilden sich die Geraden im Allgemeinen ab als geometrische Gebilde, deren Gleichungen zwei willkürlich variable Parameter (λ und σ) enthalten und vom zweiten Grade in den Coordinaten x und y sind, mithin *als Netze von Kegelschnitten. Den Punkten in der Ebene P oder Π gehören, da sie sich bestimmen durch den Durchschnitt zweier Geraden, diejenigen Punktsysteme zu, welche entstehen durch die Durchschnitte der den Geraden entsprechenden Kegelschnittnetze. Curven* $n^{\text{ter}}_{=}$ *Ordnung endlich sind zugeordnet Netze von Curven* $2n^{\text{ter}}_{=}$ *Ordnung.*

2. Ist bei Beibehaltung derselben Coordinatendreiecke der Punkt π_0 wie oben gezwungen, die Gerade $b_1y_1+b_2y_2=0$ zu durchlaufen, bewegen sich dagegen in der P Ebene zwei Hauptpunkte p und p' (S. 17.) auf der Geraden $x_2=0$, auf dieser durch den Schnitt mit der Geraden $x_1+\lambda x_0=0$, resp. $x_0+\mu x_1=0$ festgelegt (λ und μ hier selbstverständlich unabhängig von einander), so werden die Hauptdreiecke gebildet von den Seiten

$$x_0+\mu x_1=0,\ x_1+\lambda x_0=0,\ x_2=0, \quad \text{resp.} \quad y_0=0,\ y_1+\tau y_0=0,\ y_2+\sigma y_0=0,$$

und es bestehen die Relationen

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho(x_0+\mu x_1)=(y_1+\tau y_0)(y_2+\sigma y_0), & \varrho y_0 \quad\quad =(x_1+\lambda x_0)\,.\,x_2 \quad\quad , \\ \varrho(x_1+\lambda x_0)=(y_2+\sigma y_0)\,.\,y_0 \quad\quad , & \varrho(y_1+\tau y_0)= \quad x_2 \quad .\,(x_0+\mu x_1), \\ \varrho\, x_2 \quad\quad = \quad y_0 \quad .\,(y_1+\tau y_0)\,, & \varrho(y_2+\sigma y_0)=(x_0+\mu y_1)(x_1+\lambda x_0). \end{array}\right.$$

Diesen zufolge gehört zur Seite $x_2=0$ *der Punkt* π_2, *zur Seite* $y_0=0$ *die Gerade* $x_2=0$, *zu jeder anderen Geraden dagegen* ein geometrisches Gebilde zweiter Ordnung, in dessen Gleichung im Allgemeinen drei willkürlich variable Parameter (λ, μ, σ) eingehen, d. h. *eine Schaar von Kegelschnittnetzen. Einem Punkte entsprechen daher im Allgemeinen die Durchschnittspunkte zweier solcher Schaaren von Kegelschnittnetzen. Eine Curve* $n^{\text{ter}}_{=}$ *Ordnung bildet sich ab in einer Schaar von Netzen Curven* $2n^{\text{ter}}_{=}$ *Ordnung.*

3. Im allgemeinsten Fall, in dem sowohl die Hauptpunkte p_0, p_1, p_2 wie π_0, π_1, π_2 sämmtlich variabel sind auf den Curven

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{llll} f_0(x_0, x_1, x_2)=0\,, & f_1(x_0, x_1, x_2)=0\,, & f_2(x_0, x_1, x_2)=0\,; \\ \varphi_0(y_0, y_1, y_2)=0\,, & \varphi_1(y_0, y_1, y_2)=0\,, & \varphi_2(y_0, y_1, y_2)=0\,, \end{array}\right.$$

wird man, wenn die Anfangslagen der Hauptdreiecke als Coordinatendreiecke beibehalten werden, und man gemäss dem Verfahren auf S. 20 die den e_{ix} analogen auf die Π Ebene bezüglichen Coefficienten mit ε_{ix} bezeichnet und die Abkürzungen

$$\left\{\begin{array}{l} u_0\equiv e_{00}x_0+e_{10}x_1+e_{20}x_2=0\,, \\ u_1\equiv e_{01}x_0+e_{11}x_1+e_{21}x_2=0\,, \\ u_2\equiv e_{02}x_0+e_{12}x_1+e_{22}x_2=0\,, \end{array}\right\} \text{resp.} \left\{\begin{array}{l} v_0\equiv \varepsilon_{00}y_0+\varepsilon_{10}y_1+\varepsilon_{20}y_2=0\,, \\ v_1\equiv \varepsilon_{01}y_0+\varepsilon_{11}y_1+\varepsilon_{21}y_2=0\,, \\ v_2\equiv \varepsilon_{02}y_0+\varepsilon_{12}y_1+\varepsilon_{22}y_2=0 \end{array}\right\}$$

einführt, zu den Gleichungen

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho u_0 = v_1 v_2 , & \varrho v_0 = u_1 u_2 , \\ \varrho u_1 = v_2 v_0 , & \varrho v_1 = u_2 u_0 , \\ \varrho u_2 = v_0 v_1 , & \varrho v_2 = u_0 u_1 \end{array}\right.$$

gelangen, aus welchen das den Gleichungen (28) analoge System leicht hergeleitet werden kann.

§. 4. Untersuchung einiger Grenzfälle, welche durch gewisse Reductionen der Hauptdreiecke hervorgerufen werden.

Zum Schluss der Betrachtung je drei reeller Hauptpunkte in den Ebenen P und Π muss noch mehrerer in dem Vorausgehenden unerörtert gelassenen Grenzfälle Erwähnung gethan werden.

1. Führt die Auflösung der Gleichungen (5) zu zwei gleichen reellen Werthepaaren, so werden offenbar zwei Hauptpunkte in einen zusammenfallen, und dieser Umstand könnte eine andere als die bisher untersuchte Abbildung zur Folge haben. Es lässt sich nun der genannte Fall auf Untersuchungen, wie sie im vorigen § angestellt wurden, mit Leichtigkeit zurückführen. Gesetzt nemlich, es fallen in der P Ebene zwei Hauptpunkte zusammen und das Hauptdreieck reducirt sich auf die Seite $p_1 p_2$, in der Π Ebene aber existiren drei verschiedene reelle Punkte, so werden sich die den Uebergang zu entsprechenden Gebilden vermittelnden Gleichungen aus den Gleichungen (14), wie folgt, herleiten. Rückt der variable Punkt p in den Punkt p_2, stellt sich demnach p als Durchschnitt der Geraden $x_1 = 0$ mit der Geraden $x_0 = 0$ dar, was der Fall, wenn λ in der Gleichung $x_2 + \lambda x_0 = 0$ (S. 11, 1, etc.) den Werth ∞ annimmt, so reducirt sich das Hauptdreieck pp_1p_2 auf die Seite p_1p_2, und die Gleichungen (14) erhalten die Form

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho x_0 = y_1 y_2 , & \varrho y_0 = x_1 x_0 , \\ \varrho x_1 = y_2 y_0 , & \varrho y_1 = x_0 x_0 , \\ \varrho x_0 = y_0 y_1 , & \varrho y_2 = x_0 x_1 . \end{array}\right.$$

Diesem System zufolge ist das Entsprechen nun nicht mehr ein eindeutiges; denn zu der Seite $x_0 = 0$ gehört einmal der Punkt $\pi_0(y_1 = 0, y_2 = 0)$, dann der Punkt $\pi_2(y_0 = 0, y_1 = 0)$, und ferner ist der Punkt $p_2(x_0 = 0, x_1 = 0)$ der Seite $y_0 = 0$ und zugleich der Seite $y_2 = 0$ zugeordnet. *Es bildet demnach dieser Grenzfall eine bemerkenswerthe Ausnahme von der sonst durchaus eindeutigen Abbildung.* Weiter gestatten die Gleichungen (35), da aus ihnen die Coordinate x_2 ganz herausgefallen ist, nicht mehr die Aufsuchung

des der Seite $x_2 = 0$ entsprechenden Elementes. Wird aber allgemein angenommen, dass sich das Hauptdreieck $p_0 p_1 p_2$ auf die Seite $p_1 p_2$ reducirt, ohne dass darauf Rücksicht genommen wird, dass p_1 oder p_2 ein doppelter Hauptpunkt ist, so kann man auch den auf der Geraden $x_2 = 0$ variabelen Punkt p, der sich als Durchschnitt der Geraden $x_2 = 0$ mit $x_1 + \varkappa x_0 = 0$ auffassen lässt, mit dem Punkte p_1 zusammenfallen lassen; $\varkappa$ wird dann unendlich gross, und man erhält die Gleichungen

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho x_0 = y_1 y_2 , & \varrho y_0 = x_0 x_2 , \\ \varrho x_0 = y_2 y_0 , & \varrho y_1 = x_2 x_0 , \\ \varrho x_2 = y_0 y_1 , & \varrho y_2 = x_0 x_0 . \end{array}\right.$$

Letztere mit (35) verglichen, ermöglichen die Zusammenstellung

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 = \left\{\begin{array}{l} y_1 y_2 , \\ y_2 y_0 , \\ y_0 y_1 , \end{array}\right. & \varrho y_0 = \left\{\begin{array}{l} x_1 x_0 , \\ x_0 x_2 , \end{array}\right. \\ \varrho x_1 = \quad y_2 y_0 , & \varrho y_1 = \left\{\begin{array}{l} x_2 x_0 , \\ x_0 x_0 , \end{array}\right. \\ \varrho x_2 = \quad y_0 y_1 , & \varrho y_2 = \left\{\begin{array}{l} x_0 x_0 , \\ x_0 x_1 , \end{array}\right. \end{array}\right.$$

aus welcher die Mehrdeutigkeit des Entsprechens geometrischer Gebilde in diesem Grenzfalle unmittelbar in die Augen fällt. Auch ist leicht ersichtlich, wie sich das System der Gleichungen (36) entsprechend verändert, wenn eine Reduction des Hauptdreiecks auf die Seite $p_2 p_0$ oder $p_0 p_1$ eintritt.

Die analytischen Ausdrücke für diesen Grenzfall hätten sich selbsverständlich ebenso aus den Gleichungen (22) und aus den allgemeineren (28) ableiten lassen. Findet namentlich noch zugleich in der Π Ebene eine ähnliche Reduction des Hauptdreiecks statt, so können die Gleichungen (34) benutzt werden, um die an die Stelle von (35) und (36) tretenden allgemeineren Beziehungen aufzusuchen.

2. Mit dem betrachteten Grenzfall hat ein anderer eine gewisse Aehnlichkeit. Es kann sich nemlich das Hauptdreieck wieder reduciren auf eine Seite, doch in der Art, dass die drei Hauptpunkte vollkommen von einander verschiedene reelle Punkte dieser Geraden sind. In der Betrachtung des auf Seite 14 unter 2, behandelten Falles gelangt man zu diesem Problem, wenn man bei sonst unveränderten Verhältnissen dort λ und μ gleich unendlich setzt. Alsdann reducirt sich das Hauptdreieck in der P Ebene auf die Seiten $x_0 = 0$, $x_0 = 0$, $x_0 = 0$ und man erhält die Gleichungen

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho x_0 = y_1 y_2 , & \varrho y_0 = x_0 x_0 , \\ \varrho x_0 = y_2 y_0 , & \varrho y_1 = x_0 x_0 , \\ \varrho x_0 = y_0 y_1 , & \varrho y_2 = x_0 x_0 , \end{array}\right.$$

welche unmittelbar die *Mehrdeutigkeit des Entsprechens der geometrischen Gestalten in der P- und Π-Ebene* veranschaulichen. Variiren die Hauptpunkte der *P*- und *Π*-Ebene zugleich, so würde man statt des Systems (37) und der entsprechenden, in welchen an die Stelle von x_0 die Coordinaten x_1, resp. x_2 treten, allgemeinere Gleichungen mit Hilfe der Betrachtungen in §. 3, *B*, herleiten.

3. Ein dritter Grenzfall tritt auf, wenn sich das Hauptdreieck reducirt auf einen Punkt, also wenn die Auflösung der Gleichungen (5) drei gleiche reelle Werthepaare liefert. Zu den in diesem Falle geltenden Beziehungen zwischen den Coordinaten beider Ebenen führen die Gleichungen (24). Das in der *P* Ebene zu betrachtende Hauptdreieck wird (bei sonst ganz denselben Verhältnissen hier wie dort) gebildet von den Seiten $x_0=0, x_1=0$ und einer dritten, welche die Seite $x_2+\mu x_0+\lambda x_1=0$ vertritt und bei dem Uebergang zu $\mu=\infty$, $\lambda=\infty$ durch die Gerade $x_0+\varkappa x_1=0$ repräsentirt wird, vorausgesetzt dass $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\infty}{\infty}=\varkappa$ gesetzt ist. Die Gleichungen (24) verwandeln sich unter diesen Bedingungen in folgende:

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 & = y_1 y_2 , & \varrho y_0 = x_1(x_0+\varkappa x_1) , \\ \varrho x_1 & = y_2 y_0 , & \varrho y_1 = (x_0+\varkappa x_1)x_0 , \\ \varrho(x_0+\varkappa x_1) & = y_0 y_1 , & \varrho y_2 = x_0 x_1 . \end{array}\right.$$

Nimmt man die dritte Coordinatenseite $x_2=0$ parallel der Geraden $x_0+\varkappa x_1=0$ an, so dass die Relation stattfindet

$$x_0+\varkappa x_1 = x_2 + k(x_0 \sin A_0 + x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2),$$

so erhält man nach gehöriger Reduction die allgemeinen Gleichungen

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 = y_1 y_2 & , & \varrho y_0 = x_1(x_0+\varkappa x_1), \\ \varrho x_1 = y_2 y_0 & , & \varrho y_1 = (x_0+\varkappa x_1)x_0, \\ \varrho x_2 = \frac{y_0 y_1}{1+k\sin A_2} - k\sin A_0\, y_1 y_2 - k\sin A_1\, y_2 y_0 , & & \varrho y_2 = x_0 x_1 . \end{array}\right.$$

Das Entsprechen der geometrischen Gebilde ist in diesem Falle ein durchaus eindeutiges; es finden ganz dieselben Verhältnisse statt, wie sie aus den Gleichungen (6) gefolgert wurden, zumal da die Gleichungen (39) mit ersteren ganz identisch sind, nur geht die dritte Hauptseite ($x_2=0$) dort hier durch den Punkt p_2 selbst hindurch und stellt sich dar als eine Gerade $x_0+\varkappa x_1=0$; demzufolge ist dann der der dritten Hauptseite parallelen Coordinatenseite ($x_2=0$) ein dem Hauptdreieck $\pi_0\pi_1\pi_2$ umschriebener Kegelschnitt zugeordnet, wie dies auch nach den früheren Betrachtungen sofort hätte geschlossen werden können.

Findet in der Ebene *Π* zugleich eine ähnliche Reduction des Hauptdreiecks auf einen Punkt statt, so verwandeln sich, z. B. wenn die drei Hauptpunkte in den Punkt π_2 zusammenfallen, die Gleichungen (38) in die allgemeineren

$$(40)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = y_1(y_0+\lambda y_1), & \varrho y_0 = x_1(x_0+\varkappa x_1), \\ \varrho x_1 = (y_0+\lambda y_1)y_0, & \varrho y_1 = (x_0+\varkappa x_1)x_0, \\ \varrho(x_0+\varkappa x_1) = y_0 y_1, & \varrho(y_0+\lambda y_1) = x_0 x_1. \end{cases}$$

In allen andern Fällen wird man mit Anwendung der allgemeinen Gleichungen (34) zum Ziele gelangen.

§. 5. Betrachtung des Falles, in welchem die Hauptdreiecke imaginäre Elemente enthalten.

Die Betrachtung des Falles, in welchem neben reellen Hauptpunkten gleichzeitig imaginäre vorhanden sind, führt, jenachdem von den Gleichungen

$$(5)\quad A_1A_2'-A_1'A_2=0,\ A_2A_0'-A_2'A_0=0,\ A_0A_1'-A_0'A_0=0$$

und den analogen für die Π Ebene gültigen

$$B_1B_2'-B_1'B_2=0,\ B_2B_0'-B_2'B_0=0,\ B_0B_1'-B_0'B_1=0$$

nur die ersten oder nur die letzten, oder gleichzeitig beide je zwei imaginäre Wurzelpaare besitzen, zur Unterscheidung folgender Möglichkeiten:

a. in der P Ebene existiren ein reeller und zwei imaginäre Hauptpunkte; in der Π Ebene sind alle drei Hauptpunkte reell;

b. in der P Ebene sind alle drei Hauptpunkte reell; in der Π Ebene sind ein reeller und zwei imaginäre Hauptpunkte vorhanden;

c. in der P Ebene sowohl als in der Π Ebene existiren je zwei imaginäre und je ein reeller Hauptpunkt.

Die Betrachtung der Fälle *a.* und *b.* ist durchaus analog, es werden demnach nur die Fälle *a.* nnd *c.* etwas ausführlicher zu behandeln sein.

1. Offenbar müssen die beiden imaginären Hauptpunkte als der geometrische Ausdruck zweier conjugirten imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichung (5) conjugirte Punkte sein, sie lassen sich daher ansehen als die Durchschnittspunkte einer reellen Curve, am einfachsten einer reellen Geraden (allgemein einer reellen Curve beliebiger Ordnung), mit zwei conjugirten imaginären Strahlen. Zur Vereinfachung wählt man das Coordinatensystem hier gleich so, dass der dritte reelle Hauptpunkt eine Coordinatenecke ($x_0=0$, $x_1=0$) bezeichnet, während die beiden imaginären Hauptpunkte auf der dritten Coordinatenseite $x_2=0$ sich als die Durchschnittspunkte mit den beiden conjugirten imaginären Strahlen $x_0+\mu x_1=0$ und $x_0-\mu x_1=0$ bestimmen. Durch $x_0\pm\mu x_1=0$ werden nemlich imaginäre Strahlen repräsentirt, vorausgesetzt dass μ einen imaginären Werth besitzt, dass also $\mu=i\sigma$, wo σ eine reelle Zahl bedeutet. Lässt man σ zwischen

$-\infty$ und $+\infty$ variiren, so erhält man den allgemeineren Fall, dass die beiden imaginären Hauptpunkte auf der Geraden $x_2 = 0$ variabel sind.

Die analytischen Beziehungen zwischen den Coordinaten der P- und Π Ebene folgen nunmehr leicht aus den Gleichungen (22), wenn man das Verfahren auf Seite 17 ein wenig modificirt. Lässt man nemlich die dort vorausgesetzte Bewegung der reellen Hauptpunkte auf der Geraden $x_2 = 0$ nicht ganz willkürlich vor sich gehen, sondern knüpft an sie die Bedingung, dass der Strahl $p_2 p'$ mit $p_2 p$, $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ ein harmonisches Strahlbüschel ($x_0 = 0$, $x_0 \pm \mu x_1 = 0$, $x_1 = 0$) bildet, so wird in der P Ebene als Hauptdreieck das von den Seiten $x_2 = 0$, $x_0 + \mu x_1 = 0$, $x_0 - \mu x_1 = 0$ gebildete Dreieck zu betrachten sein, und es bestehen dann gemäss den Gleichungen (6) die Relationen

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho(x_0 - \mu x_1) = y_1 y_2 , & \varrho y_0 = (x_0 + \mu x_1) \cdot x_2 , \\ \varrho(x_0 + \mu x_1) = y_2 y_0 , & \varrho y_1 = x_2 \cdot (x_0 - \mu x_1), \\ \varrho x_2 = y_0 y_1 , & \varrho y_2 = (x_0 - \mu x_1)(x_0 + \mu x_1), \end{array}\right.$$

aus denen weiter folgt:

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{lll} \varrho x_0 = \frac{1}{2} y_2 (y_0 + y_1) , & \varrho y_0 = (x_0 + \mu x_1) \cdot x_2 , \\ \varrho x_1 = \frac{1}{2\mu} y_2 (y_0 - y_1) , & \varrho y_1 = x_2 \cdot (x_0 - \mu x_1), \\ \varrho x_2 = y_0 y_1 , & \varrho y_2 = (x_0 - \mu x_1)(x_0 + \mu x_1) . \end{array}\right.$$

Zu der Seite $y_0 = 0$ gehört somit, wenn μ als variabel angenommen wird, die Punktreihe auf der Seite $x_2 = 0$, zu der Seite $y_1 = 0$ dieselbe Punktreihe, nur in einer solchen anderen Lage, dass der der Geraden $y_1 = 0$ jedesmal entsprechende Punkt der vierte harmonische zu dem der Geraden $y_0 = 0$ zugeordneten Punkte ist; der Seite $y_2 = 0$ entspricht der Punkt p_2; ferner der Seite $x_0 = 0$ der Punkt, in welchem die Gerade $y_2 = 0$ von der Halbirungslinie des Aussenwinkels an der Ecke π_2 geschnitten wird, der Seite $x_1 = 0$ der Punkt, in welchem $y_2 = 0$ von der Halbirungslinie des Innenwinkels an derselben Ecke getroffen wird, so dass während der Variation der Hauptpunkte p und p' den Geraden $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ stets dieselben Punkte zugeordnet bleiben; ebenso gehört zu der Seite $x_2 = 0$ beständig der Punkt π_2.

Ganz dem entsprechend sind nun auch die Beziehungen, wenn man die imaginären conjugirten Hauptpunkte auf der Geraden $x_2 = 0$ variiren lässt, auf welcher sie sich durch den Schnitt mit den Strahlen $x_0 \pm i\sigma x_1 = 0$ festlegen. Das jeweilige Hauptdreieck in der P Ebene wird alsdann gebildet von den Seiten $x_0 - i\sigma x_1 = 0$, $x_0 + i\sigma x_1 = 0$, $x_2 = 0$, während in der Ebene Π das Dreieck $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ Hauptdreieck bleibt. Es bestehen demnach für diesen Fall immer noch die Gleichungen (41) und (42); nur besitzt μ in ihnen den imaginären Werth $i\sigma$, durch dessen Einführung das System (42) sich folgendermassen abändert:

$$(43)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = \frac{1}{2} y_2(y_0+y_1), & \varrho y_0 = (x_0+i\sigma x_1)\ .\ x_2, \\ \varrho x_1 = -\frac{i}{2\sigma} y_2(y_0-y_1), & \varrho y_1 = x_2\ .\ (x_0-i\sigma x_1), \\ \varrho x_2 = y_0 y_1, & \varrho y_2 = (x_0-i\sigma x_1)(x_0+i\sigma x_1). \end{cases}$$

Die aus den Gleichungen (41) und (42) fliessenden Relationen gelten auch hier, nur insofern modificirt, als μ in ihnen überall einen imaginären Werth besitzt. Insbesondere gehören, wie aus den Gleichungen (43) folgt, im Allgemeinen zu einem Strahl des Büschels durch den Punkt $(x_0=0,\ x_2=0)$ stets ein reeller Kegelschnitt, zu den Strahlen des Büschels mit dem Mittelpunkt $(x_0=0,\ x_1=0)$ imaginäre Punktreihen auf der Seite $y_2=0$, und zu den Strahlen durch $(x_1=0,\ x_2=0)$ imaginäre Kegelschnittschaaren durch die Hauptpunkte π_0, π_1, π_2. Den Strahlen des Büschels π_0 sind zugeordnet die reellen Punktreihen auf der imaginären Geraden $x_0-i\sigma x_1=0$, auf dieser bestimmt durch den Schnitt mit den imaginären Strahlen durch den Schnittpunkt der Geraden $x_2=0$ und $x_0+i\sigma x_1=0$ (also einen Hauptdreieckseckpunkt); den Strahlen des Büschels π_1 die reellen Punktreihen auf der imaginären Geraden $x_0+i\sigma x_1=0$, auf dieser bestimmt durch den Schnitt mit den imaginären Strahlen durch den Schnittpunkt der Geraden $x_2=0$ und $x_0-i\sigma x_1=0$; den Strahlen des Büschels π_2 endlich die imaginären Punktreihen auf der Seite $x_2=0$, auf dieser bestimmt durch den Schnitt mit einem imaginären Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt p_2 $(x_0=0,\ x_1=0)$; nur die Gerade $y_0+y_1=0$ macht eine Ausnahme, ihr entspricht der reelle Punkt $(x_0=0,\ x_2=0)$.

Eine beliebige reelle Gerade bildet sich ab in einer imaginären Kegelschnittschaar; eine Ausnahme findet nur statt bei den Strahlen mit dem Mittelpunkt $(y_0+y_1=0,\ y_2=0)$, *diesen entsprechen reelle Kegelschnittschaaren durch den Punkt* $(x_0=0,\ x_2=0)$, *wie bei näherer Betrachtung sofort ersichtlich ist. Eine reelle Curve* n^{ten} *Grades endlich bildet sich im Allgemeinen ab in einer Schaar imaginärer Curven* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

2. Befinden sich sowohl in der Ebene P als in der Ebene Π je zwei imaginäre Punkte, so wird man, wenn in der Π Ebene das Coordinatendreieck analog dem in der P Ebene gewählt wird und auch hier die imaginären Hauptpunkte variiren, zu den Relationen

$$\begin{cases} \varrho(x_0-i\sigma x_1) = (y_0+i\tau y_1)\ .\ y_2, & \varrho(y_0-i\tau y_1) = (x_0+i\sigma x_1)\ .\ x_2, \\ \varrho(x_0+i\sigma x_1) = y_2\ .\ (y_0-i\tau y_1), & \varrho(y_0+i\tau y_1) = x_2\ .\ (x_0-i\sigma x_1), \\ \varrho x_2 = (y_0-i\tau y_1)(y_0+i\tau y_1), & \varrho y_2 = (x_0-i\sigma x_1)(x_0+i\sigma x_1) \end{cases}$$

geführt. Diese geben gehörig geordnet die folgenden:

$$(44)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = \quad y_0 y_2 & , \quad \varrho y_0 = \quad x_0 x_2 & , \\ \varrho x_1 = -\frac{\tau}{\sigma} y_2 y_1 & , \quad \varrho y_1 = -\frac{\sigma}{\tau} x_2 x_1 & , \\ \varrho x_2 = (y_0 - i\tau y_1)(y_0 + i\tau y_1), & \varrho y_2 = (x_0 - i\sigma x_1)(x_0 + i\sigma x_1), \end{cases}$$

Gleichungen, aus welchen sich eine Menge sehr einfacher Beziehungen folgern lässt.

Die Betrachtung für den Fall endlich, in welchem auch die reellen Hauptpunkte variabel sind, sowie die Bewegung der imaginären Punkte an bestimmte Curven statt an die Geraden $x_2 = 0$ resp. $y_2 = 0$ gebunden ist, ist leicht mit Hilfe der Gleichungen (43) anzustellen.

Ein Problem, welches eine weitere Ausdehnung gestattet und zu mannigfachen Relationen zwischen geometrischen Gebilden in den beiden Ebenen P und Π führen kann, möge zum Schluss noch kurz berührt werden. Zwei Hauptpunkte, z. B. p_0 und p_1, rücken in das Unendliche, während in der anderen Ebene die drei Hauptpunkte eine bestimmte endliche Lage besitzen, oder in einem allgemeineren Falle gleichfalls zwei von ihnen auf der unendlich fernen Geraden liegen. Wählt man alsdann den endlichen Hauptpunkt p_2 und zwei Punkte p_0 und p_1 der unendlich fernen Geraden $x_2 = 0$ zu Coordinatendreieckseckpunkten, während in der Ebene Π das endliche Hauptdreieck als Coordinatendreieck beibehalten wird, so hängen die Coordinaten x_0, x_1, x_2 und y_0, y_1, y_2 mit einander zusammen durch die Gleichungen (41), und je nachdem μ eine reelle oder imaginäre Zahl bedeutet, sind die beiden unendlich fernen Hauptpunkte reell oder imaginär. Mit Rücksicht auf die aus (41) resultirenden Gleichungen (42) erhält man das Resultat, dass *einer Geraden in der Ebene Π im Allgemeinen ein dem Hauptdreieck umschriebener Kegelschnitt der Ebene P zugehört. Und zwar sind die den Geraden der Π Ebene zugeordneten Kegelschnitte der P Ebene stets ähnlich und ähnlich gelegen*), und speciell lauter Hyperbeln, so lange μ reell, lauter Ellipsen, so lange μ imaginär ist, und lauter Parabeln in dem Grenzfall, dass beide Hauptpunkte auf der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.* Umgekehrt wird dieselbe Beziehung auch für die in der Ebene Π den Geraden in der P Ebene entsprechenden Kegelschnitte gelten, wenn hier ebenfalls zwei Hauptpunkte sich in das Unendliche entfernen.

Zum Schlusse fühle ich mich gedrungen, Herrn Professor von Drach zu Marburg, auf dessen Veranlassung ich diese Untersuchung unternahm, für die vielfachen Rathschläge, mit denen er mich in der Ausführung derselben unterstützte, hierdurch öffentlich meinen besten Dank auszusprechen.

*) Salmon-Fiedler, analyt. Geometrie der Kegelschnitte. 2. Aufl. Art. 275.

Druckfehlerverzeichniss.

Seite 2, Z. 8 v. o. l. $\alpha'_{21}y$ statt $\alpha'_{22}y$;
„ „ „ 6 v. u. l. $0.\eta_0+0.\eta_1+0.\eta_2=0$ statt $0.\eta_1+0.\eta_1+0.\eta_2=0$;
„ 4 „ 10 v. o. l. $A_1A_2'-A_1'A_2=0$ statt $A_1A_2-A_1''A_2=0$;
„ „ „ 9 und 10 v. u. l. p_2, p_1, p_0 statt p_0, p_1, p_2;
„ 7 „ 1 v. o. ist nach durchkreuzen ein , zu setzen;
„ 8 „ 13 v. o. ist nach $\frac{r_1(r_1+1)}{2}$ ein $+$ zu setzen;
„ 9 „ 3 v. u. l. *ergibt* statt *ergiebt*;
„ 10 „ 8 v. u. ist zwischen r_2 und n ein $=$ Zeichen zu setzen;
„ „ „ 9 v. u. ist nach r_1 noch -, zu setzen;
„ 14 „ 5 v. u. l. *Rücksicht* statt *Rücksickt*;
„ 16 „ 1 v. o. ist das , hinter *Masse* zu streichen;
„ „ „ 21 v. o. l. *kehrt* statt *kekrt*;
„ 26 „ 10 v. o. l. $A_0A_1'-A_0'A_1=0$ statt $A_0A_1'-A_0'A_0=0$.